Liceo Scientifico Statale "Enrico Fermi"

Prova comune di Matematica, classi quarte

Anno Scolastico 2015/16

Classe: 4____ Nome e cognome: ____ 11/04/2016

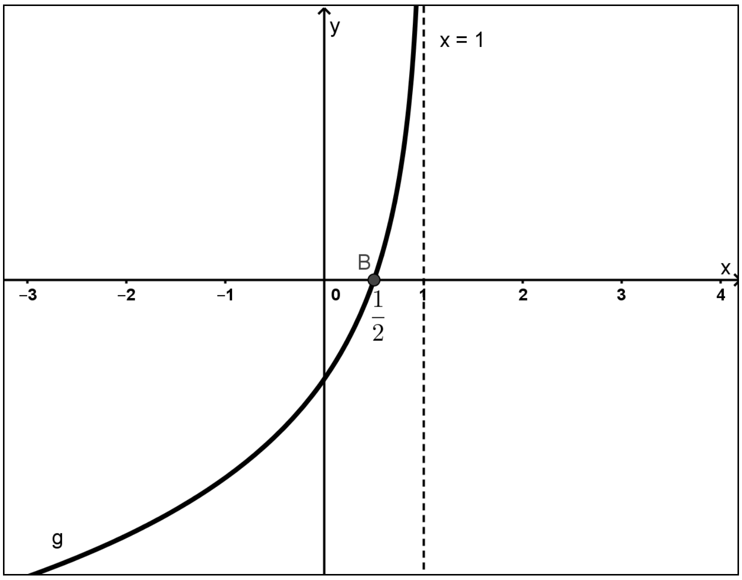
Indica **OBBLIGATORIAMENTE** nella griglia seguente i due problemi (due problemi da scegliere tra P1, P2 e P3; ciascun problema vale 26 punti) e i tre quesiti (tre quesiti da scegliere tra Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6; ciascun quesito vale 16 punti) svolti e che dovranno essere corretti dall'insegnante.

Problema n° ...	Problema n°...	Quesito n° ...	Quesito n° ...	Quesito n°...

Svolgi due problemi a scelta tra P1, P2 e P3

P1

1. Considera la funzione $y = f(x) = 2\log_a\left(|x-2| - b\right)$ con a, b parametri reali positivi e $a \neq 1$; determina i valori di a, b per i quali il dominio di f è $\mathscr{D}_f = \left]-\infty; +1\right[\cup \left]+3; +\infty\right[$ e il grafico di f passa per $A(-1; +2)$.
2. Utilizzando i valori di a, b trovati al punto precedente, rappresenta – utilizzando le trasformazioni geometriche – il grafico della funzione f e specificane gli zeri e il codominio $\mathscr{C}_f$ (inteso come insieme delle immagini).
3. Considera la funzione $y = g(x) = c + \log_{\frac{1}{2}}(d - x)$ con c, d parametri reali. Sapendo che il grafico è quello rappresentato (con linea continua) in figura e sfruttando le informazioni esplicitamente fornite, determina i valori di c, d.



4. Utilizzando i valori di a, b, c, d trovati nei punti precedenti, determina l'insieme S delle soluzioni della disequazione $f(x) \leq g(x)$ (si richiede il/i valore/i <u>esatto/i</u> degli eventuali estremi finiti degli intervalli costituenti S).

P2

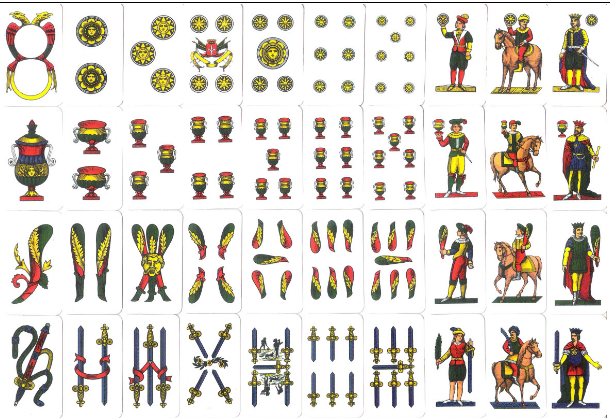
Del triangolo isoscele ABC conosci la misura della base: $\overline{AB} = \sqrt{3}$ e la misura dei lati obliqui: $\overline{BC} = \overline{AC} = 1$; indica con α gli angoli alla base e con γ l'angolo al vertice.

1. Determina l'ampiezza e le funzioni goniometriche (seno, coseno e tangente) degli angoli α e γ del triangolo ABC.
2. Costruisci esternamente al triangolo la semicirconferenza di diametro AB e sia P un suo punto; posto $P\widehat{A}B = x$, esprimi in funzione di x la somma $y = f(x)$ dei quadrati dei lati del triangolo APC.
3. Dopo aver verificato che un'espressione analitica della funzione è $f(x) = 2 + 3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x$, scrivi nella forma più opportuna l'espressione analitica di f e traccia il suo grafico nell'intervallo $[0; \pi]$, mettendo in evidenza il tratto relativo al problema.
4. Determina il valore massimo $y_{\max}$ assunto dalla funzione e il valore dell'angolo x per quale si ottiene tale massimo.

P3	Attraverso stime recenti si è constatato che in una certa popolazione il 25% degli individui soffre di ipertensione ed il 30% di obesità; inoltre, dalle stesse analisi, emerge che il k% degli individui, con k = 35, soffre di almeno una delle due patologie. Nota: in tutte le richieste dell'esercizio si deve usare il valore k = 35 e solo nella seconda parte della richiesta 5) si chiede di trovare un valore *alternativo* di k, ma tale valore non andrà in ogni caso utilizzato in nessun'altra richiesta. 1. Calcola la probabilità p_1 che un individuo di questa popolazione non sia affetto né da obesità, né da ipertensione. 2. Calcola la probabilità p_2 che un individuo di questa popolazione soffra sia di obesità che di ipertensione. 3. Calcola la probabilità p_3 che un individuo di questa popolazione sia affetto da ipertensione ma non da obesità. 4. Calcola la probabilità p_4 che un individuo di questa popolazione sia iperteso o non obeso. 5. Fa' vedere che l'insorgenza dell'ipertensione e dell'obesità non sono da ritenersi tra loro indipendenti bensì esse sono correlate; per quale valore di k ci sarebbe stata invece indipendenza? 6. Quanto vale la probabilità p_6 che un individuo obeso sia iperteso? 7. Fa' vedere che l'obesità favorisce l'insorgere dell'ipertensione calcolando di quante volte è maggiore il rischio di essere iperteso per un obeso rispetto al rischio di essere iperteso per non obeso. **Presenta il corretto formalismo (sia per i dati che per le richieste) e giustifica sempre i passaggi fornendo sempre i riferimenti ai teoremi utilizzati. Usa gli eventi O = "*un individuo soffre di obesità*" e I = "*un individuo soffre di ipertensione*"; ogni altro evento dovrà essere espresso utilizzando questi due eventi.**

Risolvi TRE quesiti a scelta tra i seguenti sei:

Q1



Si estraggono 4 carte da un mazzo di carte napoletane (40 carte in totale; 4 semi: denari, coppe, bastoni, spade da 10 carte ciascuno: asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, cavallo, re; queste ultime tre carte – tre carte per seme - sono dette figure; si veda anche l'illustrazione a fianco).

Se le carte vengono estratte **contemporaneamente**, calcola:

a) in quanti modi diversi X_a è possibile estrarre le 4 carte;
b) in quanti modi diversi X_b è possibile estrarre le 4 carte in modo che non contengano nessuna figura;
c) in quanti modi diversi X_c è possibile estrarre le 4 carte in modo che contengano almeno un re.

Se invece le carte vengono estratte **successivamente con reimmissione** (ossia si estrae una carta alla volta, si annota il risultato e poi la reinserisce nel mazzo prima di procedere alla successiva estrazione), calcola:

d) in quanti modi diversi X_d è possibile estrarre le 4 carte;
e) in quanti modi diversi X_e è possibile estrarre le 4 carte in modo che non contengano nessuna figura;
f) in quanti modi diversi X_f è possibile estrarre le 4 carte in modo che contengano almeno un re;

pertanto le richieste d,e,f sono formalmente uguali alle richieste a,b,c ma è cambiato il modo di estrarre le carte.

Nota: l'esercizio deve essere risolto in modo che sia chiaro il ragionamento seguìto, quindi devi fornire una spiegazione a parole che giustifichi le tue scelte e devi presentare il calcolo con tutti i passaggi, in modo che le espressioni che forniscono i valori di X_a, X_b... siano autoesplicative; non verrà attribuito alcun punteggio a chi scriverà solamente, ad esempio, X_a= 200 al di là dell'eventuale correttezza del risultato.

Q2

Considera la funzione $f(x)=\left(\dfrac{4}{\pi}\arccos|x-1|\right)-1$.

a) Rappresentane il grafico.
b) Determinane il domino e il codominio (inteso come insieme delle immagini).
c) Risolvi graficamente la disequazione $f(x)>1-\sqrt{1-x^2}$.

Obbligatorio usare unità di almeno 4 quadretti.

Q3

a) Calcola il valore della seguente espressione in $\mathbb{C}$:

$$i^{24}+i\left[\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right)\right]^{10}+\left|2-2i\right|^2-\frac{2(2-i)^2}{1-i}$$

e indica con u il risultato ottenuto.

b) Dopo aver trovato al punto precedente che $u=i$, risolvi in $\mathbb{C}$ l'equazione nell'incognita complessa z:

$$\left|2+3i-u\right|^2+4zu=-z^2.$$

c) Calcola le radici cubiche in campo complesso di $27u$.

Q4

Determina il dominio delle seguenti funzioni:

a) $y=f(x)=\dfrac{1}{2\cos x-2\sin x-2\sin 2x+1}$

b) $y=g(x)=\log_2\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\tan x+1}\right)$

c) $y=h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4^{\sin x}-2^{2+\sin x}+3}}$

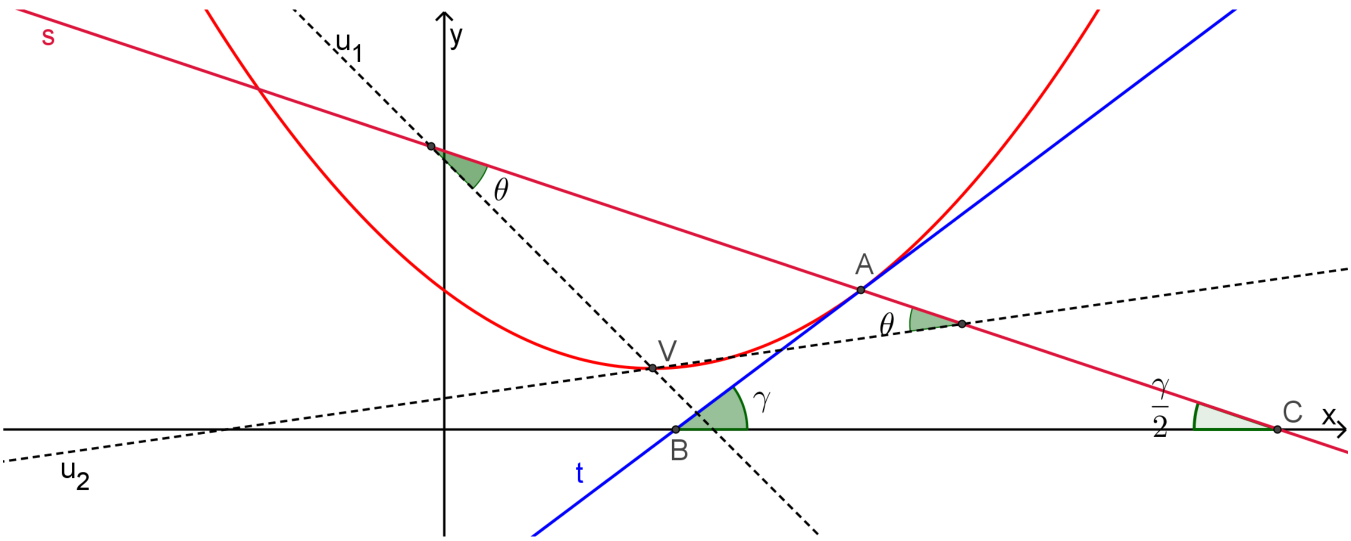
Q5

a) Considera la parabola $\mathscr{P}$: $y=\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{4}x+2$; determina l'equazione della retta tangente t condotta dal punto A di ascissa 6 della parabola e calcola le funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente) dell'angolo γ che la retta t forma con l'asse delle x in direzione positiva.

b) Determina l'equazione della retta s passante per A e che forma con l'asse delle x in direzione <u>negativa</u> un angolo di ampiezza $\frac{\gamma}{2}$.

c) Dopo aver trovato al punto precedente che l'equazione di s è $x+3y-12=0$, determina le equazioni delle rette u_1 ed u_2 passanti per il vertice V della parabola e che formano con s un angolo $\theta=\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

La figura, priva di riferimenti metrici, è fornita nel séguito.



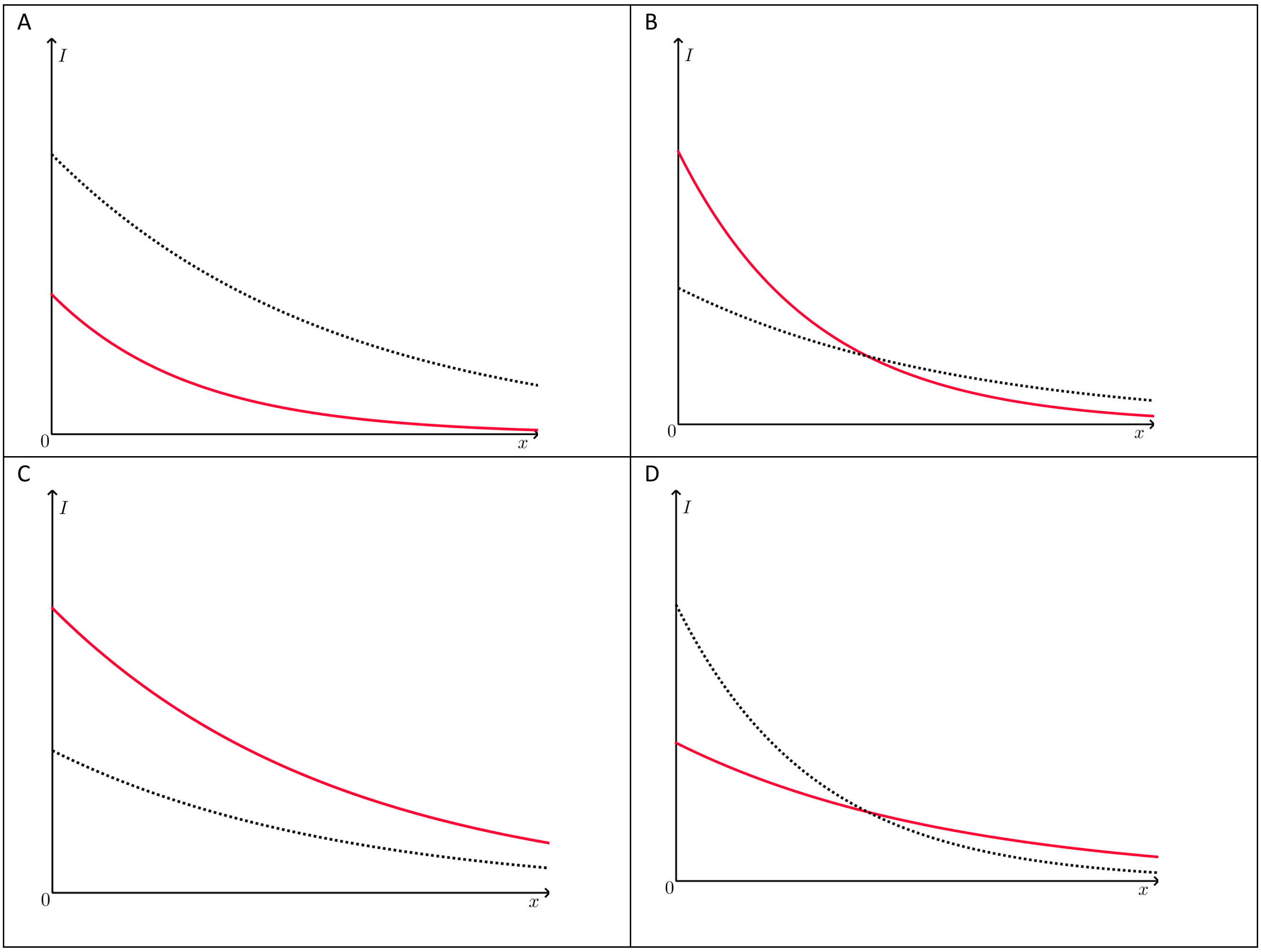
Q6 Quando un'onda sonora investe una parete fonoassorbente, la sua intensità I diminuisce secondo la legge $I = I_0 \cdot e^{-\alpha x}$, in cui I_0 indica l'intensità dell'onda incidente, x la lunghezza del cammino, misurato in metri, che l'onda percorre all'interno della parete e α (misurato in m^{-1}) un coefficiente caratteristico del materiale fonoassorbente, detto *coefficiente di assorbimento*.

a) Determina in funzione di α la lunghezza x_1 del cammino che deve percorrere l'onda all'interno della parete affinché la sua intensità divenga la metà dell'intensità dell'onda incidente.

b) Con riferimento alla richiesta precedente, se l'onda percorre all'interno della parete un cammino $x_2 = 2x_1$, di quanto si è ridotta in percentuale la sua intensità rispetto all'intensità dell'onda incidente?

c) Calcola il coefficiente di assorbimento α di un materiale per il quale l'intensità di un'onda viene ridotta a $\frac{1}{10}$ di quella incidente dopo che essa ha percorso $5{,}000 \cdot 10^{-3}$ m all'interno del materiale stesso. Esprimi in m^{-1} il risultato con 4 cifre significative.

d) Un'onda (onda 1) di intensità 0,20 W/m^2 investe una parete con coefficiente di assorbimento α_1; un'altra onda (onda 2) di intensità 0,10 W/m^2 investe un'altra parete con coefficiente di assorbimento $\alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha_1$. Quale tra i seguenti grafici descrive l'intensità delle due onde all'interno delle pareti in funzione dello spazio percorso? Motiva la risposta.
Con tratto continuo è indicata l'intensità dell'onda 1, con tratto discontinuo quella dell'onda 2.



Durata della prova: 175 minuti (8.15-11.10 in sede centrale; 8.05-11.00 in sede associata).
È consentito l'uso della calcolatrice scientifica non programmabile.
Non scrivere nulla nella tabella sottostante.

	P1	P2	P3	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	punteggio massimo totale	voto
Punti	26	26	26	16	16	16	16	16	16	100	

Il punteggio viene attribuito in base alla correttezza e completezza della risoluzione dei vari problemi/quesiti, nonché alle caratteristiche dell'esposizione (chiarezza, ordine, struttura). **La sufficienza si ottiene con il punteggio minimo di 60 punti.**