ESAME di STATO di LICEO SCIENTIFICO

SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2015 – 2016

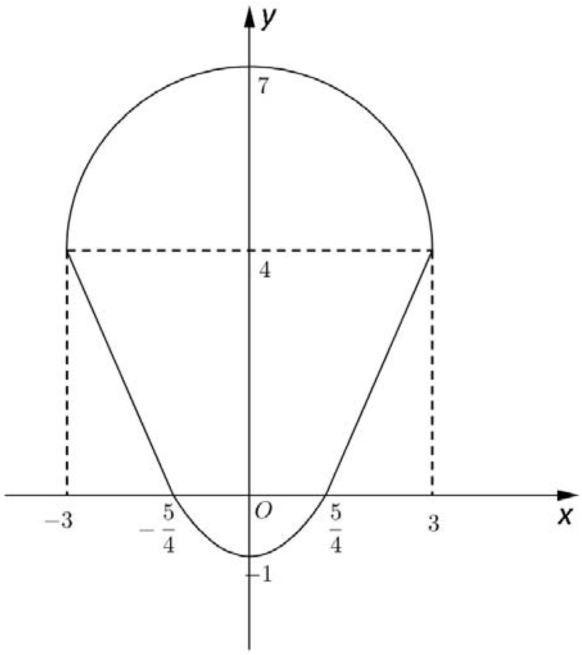
Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di : MATEMATICA

Nome del candidato ___________________________________	Classe 5^ Sez. __________
Il candidato risolva <u>uno</u> dei due problemi proposti.	Correggere il problema N° ____

PROBLEMA 1.

Si deve costruire un'aiuola da coltivare con le viole. L' aiuola viene inizialmente progettata in modo che il suo bordo sia costituito dalla curva $\mathcal{C}$ riportata nel séguito.



La parte sottostante della curva $(y < 0)$ è un arco di parabola, quella sovrastante $(4 \le y \le 7)$ è una semicirconferenza. Nel tratto intermedio $(0 \le y < 4)$ sono tracciati due segmenti. I dati sono da intendersi espressi in metri.

1. Scrivi le equazioni delle curve che rappresentano il bordo dell'aiuola nel sistema di assi cartesiani suggerito nella figura.
   - Se consideri il tratto con le ordinate comprese tra -1 e 4 la curva che hai scritto rappresenta il grafico di una funzione $y = f(x)$. Nei punti $P\left(-\frac{5}{4};0\right)$ e $Q\left(\frac{5}{4};0\right)$ tale funzione è derivabile?

     Motiva la risposta.
   - Si valuta di ripensare il bordo dell'aiuola in modo da eliminare la 'spigolosità' nei punti *P* e *Q* lasciando i tratti rettilinei e modificando l'equazione della parabola. Quale nuova equazione si ottiene per la parabola?

Durata massima della prova: 5 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile NON programmabile.

Non saranno consentite uscite prima delle ore 10.30; la verifica non potrà essere consegnata prima delle ore 12.15.

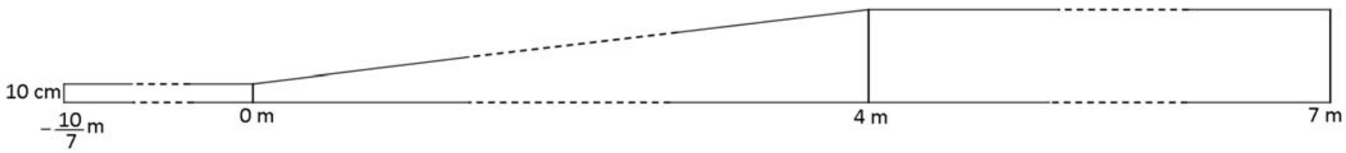
Dopo le ore 12.15 gli studenti che avranno consegnato la prova sarà consentita l'uscita dall'istituto.

2. Avendo ottenuto per la parabola l'equazione $y = \frac{32}{35}x^2 - \frac{10}{7}$,

- si procede a progettare la parte interna dell' aiuola. Una parte verrà seminata con viole di colore bianco, l' altra con viole di colore viola. Le due parti verranno separate da una linea curva che si può approssimare con una cubica del tipo $y = g(x) = a\,|x|^3 + b\,|x| + c$. Determina la sua equazione sapendo che passa per $C\,(0;\,2)$ e per $D\,(3;4)$ e che in *D* presenta un massimo relativo.
- Rappresenta il grafico di g e completa l'aiuola con il profilo delle due parti del punto precedente.

3. Si passa al calcolo della spesa.

- Vanno collocate 3 piantine ogni 2 dm^2 . Queste vengono acquistate in confezioni da 12 piantine. Ciascuna confezione costa € 7.50 per i fiori bianchi e € 7.75 per quelli viola. Calcola la spesa totale per le piantine se per la zona delimitata in parte dalla semicirconferenza viene scelto il colore bianco. *Per questa richiesta supponi che la superficie dell'aiuola sia ovunque parallela al terreno anche se nel séguito verrà specificato che una parte è inclinata; devi quindi ignorare questo fatto per quanto riguarda il calcolo della spesa per le piantine*.
- Va acquistata la terra per riempire l'aiuola Si pensa di dare all'aiuola, nella sola parte delimitata dai segmenti $(0 \le y < 4)$, una pendenza di $1/10$. Il profilo che si ottiene sezionando l'aiuola con un piano che le è perpendicolare e che passa per l' asse *y* risulta come appare nella figura sottostante *(tieni presente che per motivi di leggibilità del grafico in orizzontale i dati sono in metri e in verticale in cm e che le proporzioni sono conservate solo in verticale*):



Calcola quanto vale la spesa per la terra sapendo che occorre acquistarla in sacchi da 10 kg ciascuno del costo di € 0.2 e che la densità di tale terra è di circa 750 kg/m^3.

4. La superficie laterale del bordo dell'aiuola viene rivestita con un materiale che la contenga e che costa € 25 al m^2. Per calcolare la quantità necessaria approssima la parte della parabola con una circonferenza di centro $O(0;0)$ e raggio $\frac{5}{4}$ tenendo presente che commetti un errore per difetto dell' 1% circa. Qual è la spesa?

PROBLEMA 2.

Data la funzione di equazione $$f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

1. studia la funzione data individuandone il dominio, la parità, il comportamento negli estremi del dominio, gli eventuali estremanti, il flesso e la tangente nel flesso e tracciane il grafico *G* in un riferimento cartesiano *Oxy (scegliendo come unità di misura almeno 4 quadretti)*.

2. Mostra che la funzione $f(x)$ soddisfa le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[0;1]$ e trova il valore x_0 nell'intervallo che verifica la tesi del teorema. Mostra poi che la funzione nel medesimo intervallo non verifica le ipotesi del teorema di Rolle.

3. Sia *R* la regione di piano limitata da *G*, dall'asse *x* e dalle rette $x=0$ e $x=1$. Calcola l'area di *R*. Determina il valore dell'errore percentuale che si verifica nel calcolo di tale area se nell'intervallo $[0;1]$ si adotta, per approssimare $f(x)$, un polinomio di 3° grado della forma

   $$P(x)=a\,x^3+b\,x^2+c\,x+d\ ,\quad x\in\mathrm{R}\,,\ a,b,c,d\in\mathrm{R}$$

   con $P(0)=0$, $P(-x)=-P(x)$, $P'(0)=1$, $P'(4)=7$.

   - Dopo aver enunciato il teorema del valore medio, calcola il valore medio $f(x_1)$ della funzione nell'intervallo $[0;1]$ e il valore x_1 del punto nell'intervallo.
   - Calcola il volume del solido che si ottiene ruotando la regione *R* attorno all'asse *y.*

4. Dimostra che la funzione f è invertibile f^{-1} nel suo dominio e detta g la funzione inversa di f, ovvero sia $g(x)=f^{-1}(x)$, tracciane il grafico *G'* Verifica che la funzione $y=g(x)$ si può scrivere nella forma $$g(x)=h+\frac{k\,e^x}{1+e^x}$$

   dove *h* e *k* sono numeri reali che ti è richiesto di trovare.

   - Determina l'area $A(\lambda)$ della regione finita di piano delimitata dal grafico di *G'*, dalla retta $y=2$ e dalle rette $x=0$ e $x=\lambda$ $(\lambda>0)$.
   - Calcola $$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)$$

   e fornisci un'interpretazione geometrica del risultato.

ESAME di STATO di LICEO SCIENTIFICO

SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2015 – 2016

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di : MATEMATICA

Nome del candidato ________________________________	Classe 5^ Sez.__________					
Il candidato risolva <u>cinque</u> dei dieci quesiti. Correggere i quesiti N°:	___	___	___	___	___	

QUESITO 1.

Dopo aver tracciato il grafico delle coniche di equazione $xy = 2$ e $x^2 - y^2 = 3$ in uno stesso riferimento cartesiano *Oxy*, dimostra che esse si intersecano ortogonalmente (*due curve si intersecano ortogonalmente se le loro tangenti sono mutuamente perpendicolari in ogni punto in cui le curve si intersecano*).

QUESITO 2.

Mostra che la funzione $f(x) = x^5 - 7x + k$ ha <u>*al più*</u> uno zero in $[-1;1]$ per qualunque valore di $k \in \mathrm{R}$.

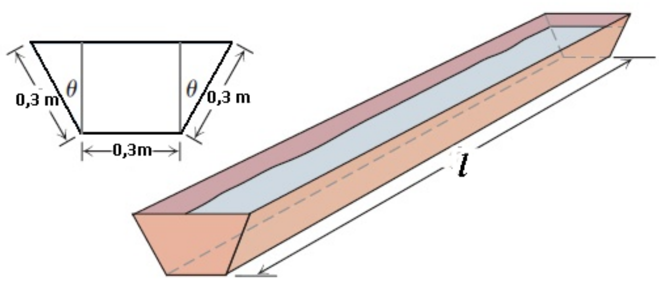
QUESITO 3.

Sapendo che una *primitiva* della funzione $f(x)$ è $F(x) = \ln|x| + 1$, calcola $\int_{2e}^{2e^3} f\left(\frac{x}{2}\right)dx$.

QUESITO 4.

Un punto materiale di massa *m* è vincolato a muoversi lungo l'asse *x* sotto l'azione di una forza. Sapendo che la sua legge oraria è $x(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})$ dove il tempo *t* è misurato in secondi e lo spazio *x* in metri, determina l' istante *t* in cui tale forza raggiunge la sua massima intensità.

QUESITO 5.



Il trogolo (*mangiatoia per animali*) della figura deve essere ricavato da una lamiera metallica lunga $l = 6{,}0\,\mathrm{m}$ e larga $0{,}9\,\mathrm{m}$. Per costruirlo si devono piegare verso l'alto due strisce larghe $0{,}3\,\mathrm{m}$ in modo da formare con la verticale angoli θ uguali.

a) Esprimi il volume del trogolo in funzione di θ.

b) Trova il volume massimo del trogolo.

QUESITO 6.

Considera nel primo quadrante del piano cartesiano *Oxy* la regione *R* di piano limitata dalla curva $y = x^3$ e dalla retta $y = 4x$. Determina il volume del solido generato dalla rotazione completa della regione *R* attorno ***a)*** all'asse *x* ; ***b)*** alla retta *y* = 8.

QUESITO 7.

Sia f una funzione continua in **R**;

a) determina l'espressione analitica di f e i valori del parametro $a \in \mathrm{R}$ per cui risulta

$$\int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x\,;$$

b) calcola $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,dt}{x^4}$$

QUESITO 8.

Sia T_0 = 60 °C la temperatura iniziale dell'acqua contenuta in un serbatoio. La temperatura ambiente è di 10 °C. Al trascorrere del tempo t (*espresso in ore*) la rapidità con cui la temperatura $T(t)$ del serbatoio , funzione del tempo *t*, diminuisce è espressa dall'equazione differenziale $T' = -\frac{1}{2}(T-10)$.

a) Trova la legge $T = T(t)$ che esprime la temperatura $T(t)$ del serbatoio, funzione del tempo t (soluzione dell'equazione differenziale data)

b) Calcola la temperatura dell'acqua dopo 4 h e 36'.

QUESITO 9.

Un'indagine medica condotta su un campione di persone, rappresentativo dell'intera popolazione, ha individuato che il 12% delle persone sono affette da difterite. È stato messo a punto un test clinico per individuare la presenza della malattia in un individuo prima che questi ne avverta i sintomi. Il test ha dato i seguenti risultati: l'8% degli individui sani è risultato positivo al test e il 5% degli individui malati è risultato negativo al test.

a) Qual è la probabilità che una persona affetta dalla malattia risulti positiva al test e qual è la probabilità che una persona sana risulti negativa al test?

b) Qual è la probabilità che il test risulti positivo indipendentemente dal fatto che la persona alla quale è stato somministrato il test sia sana o malata?

c) Se l'esito del test è positivo, qual è la probabilità che la persona sia realmente malata e qual è la probabilità che la persona sia sana?

Cosa concludi circa la validità del test?

QUESITO 10.

Determina l' equazione della superficie sferica che ha centro nel punto di intersezione tra la retta $r: \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-2t \\ z = t \end{cases}$ e il piano $\alpha:\ x+2y-z-3=0$ e raggio pari a $\sqrt{6}$.

Ricava poi l'equazione dei piani paralleli a α e tangenti alla superficie sferica stessa.

■