# Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE: SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2013-14

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

| Nome del candidato ______________________ | Classe __________ |
| --- | --- |
| Il candidato risolva uno dei due problemi; il problema da correggere è il numero __________ | |

**PROBLEMA 1**

Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$ con $a,b$ parametri reali.

1. Si determinino i valori di $a,b$ in modo tale che la retta $t: \ y=7x-20$ risulti tangente al grafico di $f$ nel suo punto $P$ di ascissa $4$.
2. Dopo aver verificato al punto precedente che la funzione così ottenuta ha equazione $f(x)=-4\sqrt{x}+x^2$, si studi la funzione e se ne rappresenti il grafico $\Gamma$, specificando in particolare se esistono punti di non derivabilità.
3. La regione finita di piano $S$ delimitata da $\Gamma$, dall'asse delle $x$ e dalle rette $x=0$ e $x=1$ è la base di un solido $W$ le cui sezioni, ottenute tagliando $W$ con piani perpendicolari all'asse $x$, nel punto di ascissa $x$ sono rettangoli di altezza $h(x)=\sqrt{x}$; si calcoli il volume di $W$.
4. Si scriva l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle $y$, passante per l'origine $O$ e tangente al grafico $\Gamma$ di $f$ nel suo punto $P$ di ascissa $4$ e se ne tracci il grafico.
5. Sia $y=h$ con $h\in\mathbb{R}$ l'equazione di una retta $r$ che intersechi il grafico della parabola $\mathcal{P}$ nel semipiano delle $y\le 0$; si determini $h$ in modo tale che, dette $A$ e $B$ le intersezioni di $r$ con il grafico di $\mathcal{P}$ e $D$ e $C$ le proiezioni di $A$ e $B$ rispettivamente sull'asse delle $x$, il rettangolo $ABCD$ abbia area massima.

**PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione $y=\begin{cases} x^h \ln x & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ con $h$ parametro reale.

1. Si determini $h$ in modo che la funzione abbia un punto di minimo relativo in $x=e^{-1}$.
2. Dopo aver verificato al punto precedente che tale richiesta è soddisfatta per $h=1$, si studi la funzione $y=f(x)$ così ottenuta e se ne rappresenti il grafico $\Gamma$ ed in particolare si stabilisca se la funzione $f$ è continua e derivabile in $x=0$.
3. A partire dal grafico $\Gamma$ di $y=f(x)$, si tracci il grafico $\Lambda$ di $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ senza ricercare gli intervalli di concavità/convessità di $g$.
4. Verificato che le due curve $\Gamma$ e $\Lambda$ hanno uno e un solo punto $A$ in comune, si determini l'ascissa di $A$ utilizzando un metodo numerico a scelta e approssimandola a meno di $10^{-1}$.
5. Si calcoli l'area $\mathfrak{a}(t)$ della regione di piano $\mathfrak{D}_t$ delimitata dal grafico $\Lambda$ della funzione $g$, dall'asse delle $x$ e dalle rette $x=2$ e $x=t$ con $t\ge 2$; si calcoli quindi $\lim_{t\to\infty}\mathfrak{a}(t)$. Che cosa rappresenta tale limite?

---

Durata massima della prova: 5 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentita l'uscita dall'aula per recarsi ai servizi prima delle 10.30 e comunque non durante i cambi dell'ora e non durante il II intervallo; non è consentita la consegna della prova prima delle 12.15; non è consentito uscire dall'edificio scolastico prima delle 13.15 (13.05 per la sede associata).

# Y557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE: SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2013-14

**Indirizzo:** PIANO NAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nome del candidato ______________________ | Classe ________ | | | | |
| Il candidato risolva cinque dei dieci quesiti; i quesiti da correggere sono i numeri | ___ | ___ | ___ | ___ | ___ |

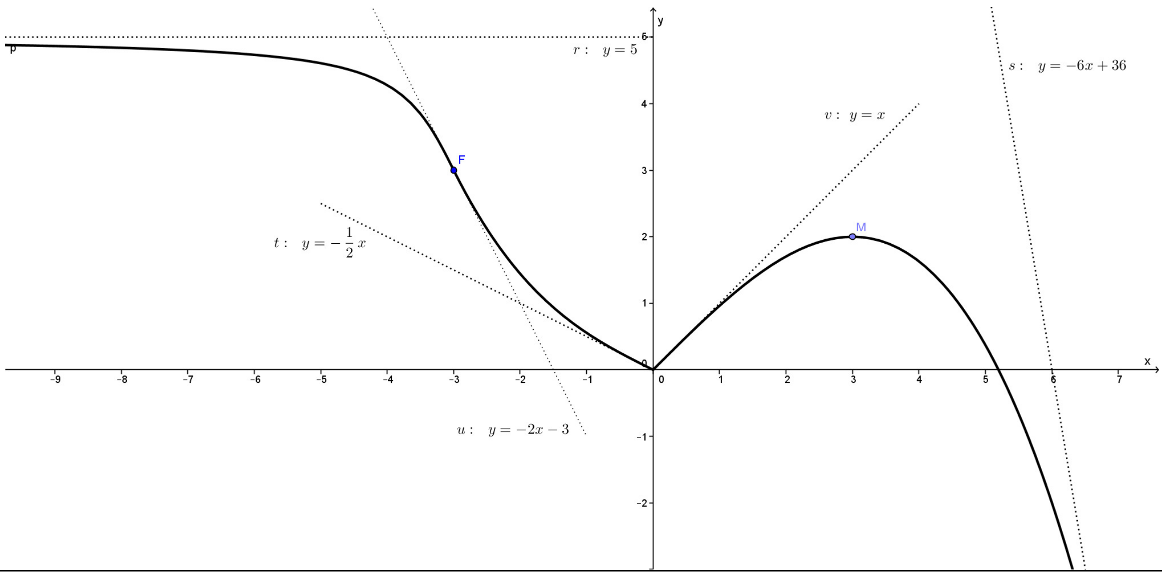
**QUESTIONARIO**

**1.** Sia $y = h(x)$ una funzione avente $\mathbb{R}$ come dominio, ovunque derivabile e tale che $h(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; si consideri la funzione $g(x) = \ln\left(h(x)\right)$; sapendo che la retta tangente al grafico di $h$ nel suo punto $P$ di ascissa 1 ha equazione $t: y = 2x + e - 2$, si determini l'equazione della retta tangente $s$ al grafico di $y = g(x)$ nel suo punto $Q$ di ascissa 1.

**2.** Si risolva l'equazione $\binom{x+1}{4} - \binom{x}{x-3} = 5!\dfrac{79!}{80!} \cdot \binom{x-1}{3}$.

**3.** Si calcoli il seguente limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^{\sin x} \left(e^{t^2} - 1\right) dt}{x - \sin x}$.

**4.** Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale il cui grafico è quello mostrato in figura (in particolare $F(-3,3)$ punto di flesso, $M(3,2)$ punto di massimo rel., $r: y = 5$, $s: y = -6x + 36$ asintoti, $u: y = -2x - 3$, $t: y = -\dfrac{1}{2}x$ e $v: y = x$ tangenti o semitangenti). Detta $g(x) = f\,'(x)$ la funzione derivata prima di $f$, si determinino dominio, segno, intervalli di crescenza e decrescenza, le coordinate dei punti di massimo o minimo relativo, i limiti agli estremi del dominio di $g$ e si disegni un grafico per $g$ coerente con le informazioni ricavate.



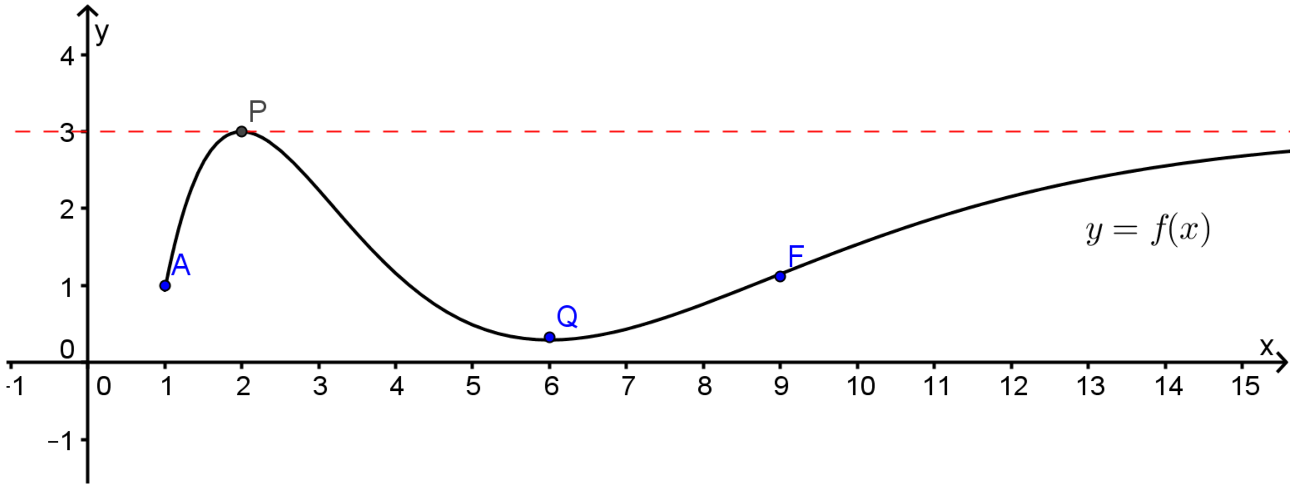

**5.** Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita su $\mathbb{R}$ e ivi continua; sapendo che $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^5 f(x)dx = 10$ e che $\int_1^2 \left(x \cdot f(x)\right) dx = 18$, calcolare, se possibile, $A = \int_0^2 f(2x+1)\,dx$ e $B = \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right) dx$.

**6.** Si consideri la funzione $f(x)=x^3$. Applicando a tale funzione il teorema (del valor medio) di Lagrange nell'intervallo $[a,1]$ con $0<a<1$, si dimostri che esiste un solo punto $c$, interno ad $[a,1]$, in cui risulta $f'(c)=a^2+a+1$. Si mostri inoltre che questo numero $c$ verifica la condizione $\frac{a+1}{2}<c<1$.

**7.** La funzione $y=f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[1;+\infty[$ e in figura è disegnato il grafico $\Lambda$ di $f$. Esso presenta un massimo assoluto in $P(2;3)$, un minimo assoluto in $Q\left(6;\frac{1}{3}\right)$ e un flesso a tangente obliqua in $F\left(9;\frac{11}{10}\right)$.

a) Si tracci un grafico plausibile della primitiva $y=F(x)$ di $f$ passante per il punto $B(2;4)$

b) La $y=f(x)$ descrive, in opportune unità di misura, l'andamento della produzione dell'acciaio in Italia dal 2005 (punto A) ad oggi ed in proiezione futura, ossia $x=1$ corrisponde all'anno 2005, $x=2$ corrisponde all'anno 2006 e così via. A partire dal grafico si descriva l'andamento di tale produzione. Quali informazioni si possono dedurre dal fatto che la curva presenta un flesso e un asintoto orizzontale?




**8.** La forza gravitazionale $F$ esercitata dalla Terra su una massa unitaria posta a distanza $r$ dal centro della Terra è espressa in funzione di tale distanza da:

$$F(r)=\begin{cases}\dfrac{GMr}{R^3} & \text{se} \quad r<R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se} \quad r\geq R\end{cases}$$

ove $G$ è la costante di gravitazione universale, $R$ è il raggio della Terra e $M$ la massa della Terra.
La funzione $F(r)$:

a) è continua
b) presenta una discontinuità eliminabile per $r=R$
c) presenta un salto per $r=R$
d) presenta un asintoto per $r=R$

Si motivi esaurientemente la risposta.

**9.** Una scatola chiusa, avente la forma di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata, ha volume uguale a $16000$ cm$^3$. Il materiale per il coperchio e per la base costa 3 euro al cm$^2$ mentre il materiale per le pareti laterali costa 1,5 euro al cm$^2$.

a) Quali sono le dimensioni della scatola che minimizzano il costo per realizzarla?
b) Qual è il costo minimo per realizzare la scatola?

**10.** Una scatola contiene 15 lampadine: 10 funzionanti e 5 difettose. Si prendano a caso 3 lampadine dalla scatola. Si calcoli la probabilità $p$ che:

a) nessuna sia difettosa, b) esattamente 1 sia difettosa, c) almeno 1 sia difettosa.