M557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO: SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2013-14

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Nome del candidato ______________________________	Classe ______________
Il candidato risolva uno dei due problemi; il problema da correggere è il numero ______________	

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale di variabile reale $f(x)=a\sqrt{x}+bx^2$ con a,b parametri reali.

1. Si determinino i valori di a,b in modo tale che la retta $t: y=7x-20$ risulti tangente al grafico di f nel suo punto P di ascissa 4.
2. Dopo aver verificato al punto precedente che la funzione così ottenuta ha equazione $f(x)=-4\sqrt{x}+x^2$, si studi la funzione e se ne rappresenti il grafico Γ, specificando in particolare se esistono punti di non derivabilità.
3. La regione finita di piano S delimitata da Γ, dall'asse delle x e dalle rette $x=0$ e $x=1$ è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x, nel punto di ascissa x sono rettangoli di altezza $h(x)=\sqrt{x}$; si calcoli il volume di W.
4. Si scriva l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ con asse parallelo all'asse delle y, passante per l'origine O e tangente al grafico Γ di f nel suo punto P di ascissa 4 e se ne tracci il grafico.
5. Sia $y=h$ con $h\in\mathbb{R}$ l'equazione di una retta r che intersechi il grafico della parabola $\mathcal{P}$ nel semipiano delle $y\le 0$; si determini h in modo tale che, dette A e B le intersezioni di r con il grafico di $\mathcal{P}$ e D e C le proiezioni rispettivamente di A e B sull'asse delle x, il rettangolo $ABCD$ abbia area massima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione $y=\begin{cases} x^h \ln x & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \end{cases}$ con h parametro reale.

1. Si determini h in modo tale che la funzione abbia un punto di minimo relativo in $x=e^{-1}$.
2. Dopo aver verificato al punto precedente che tale richiesta è soddisfatta per $h=1$, si studi la funzione $y=f(x)$ così ottenuta e se ne rappresenti il grafico Γ ed in particolare si stabilisca se la funzione f è continua e derivabile in $x=0$.
3. A partire dal grafico Γ di $y=f(x)$, si tracci il grafico Λ di $y=g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ senza ricercare gli intervalli di concavità/convessità di g.
4. Si determini il numero di soluzioni dell'equazione $g(x)=k$ al variare del parametro reale k.
5. Si calcoli l'area $\mathfrak{a}(t)$ della regione di piano $\mathfrak{D}_t$ delimitata dal grafico Λ della funzione g, dall'asse delle x e dalle rette $x=2$ e $x=t$ con $t\ge 2$; si calcoli quindi $\lim_{t\to\infty}\mathfrak{a}(t)$. Che cosa rappresenta tale limite?

Durata massima della prova: 5 ore. È consentito l'uso della calcolatrice tascabile non programmabile.
Non è consentita l'uscita dall'aula per recarsi ai servizi prima delle 10.30 e comunque non durante i cambi dell'ora e non durante il II intervallo; non è consentita la consegna della prova prima delle 12.15; non è consentito uscire dall'edificio scolastico prima delle 13.15 (13.05 per la sede associata).

M557- ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO: SIMULAZIONE DELLA II PROVA A.S. 2013-14

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Nome del candidato ________________________					Classe ____________
Il candidato risolva cinque dei dieci quesiti; i quesiti da correggere sono i numeri	___	___	___	___	___

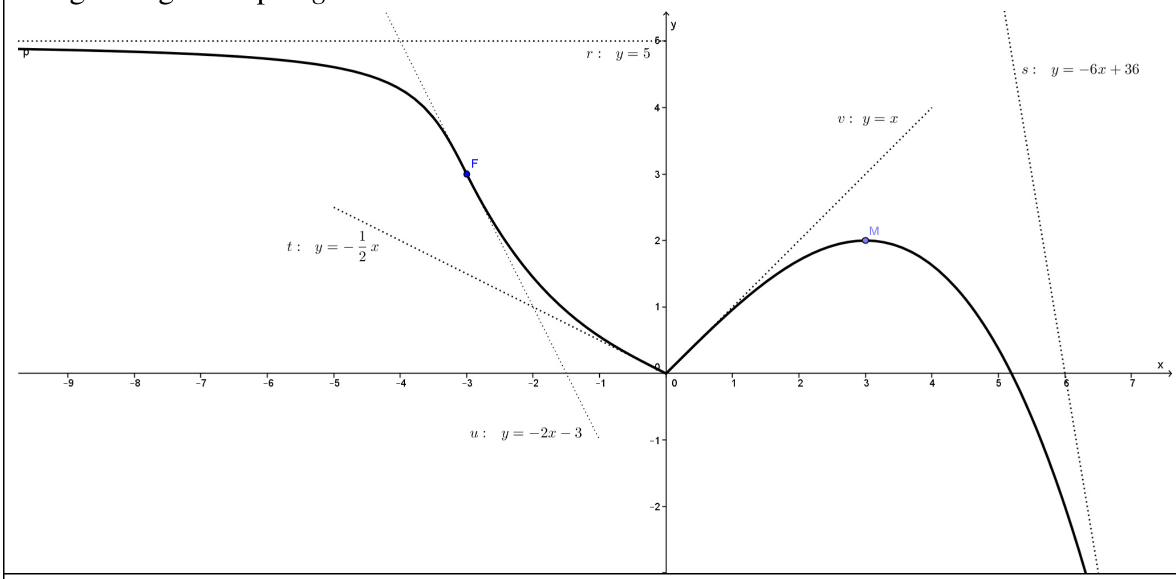
QUESTIONARIO

1. Sia $y = h(x)$ una funzione avente $\mathbb{R}$ come dominio, ovunque derivabile e tale che $h(x) > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$; si consideri la funzione $g(x) = \ln\left(h(x)\right)$; sapendo che la retta tangente al grafico di h nel suo punto P di ascissa 1 ha equazione $t:\ y = 2x + e - 2$, si determini l'equazione della retta tangente s al grafico di $y = g(x)$ nel suo punto Q di ascissa 1.

2. Si risolva l'equazione $\binom{x+1}{4} - \binom{x}{x-3} = 5!\dfrac{79!}{80!} \cdot \binom{x-1}{3}$.

3. Si calcoli il seguente limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \left(e^{t^2} - 1\right) dt}{x - \sin x}$.

4. Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale il cui grafico è quello mostrato in figura (in particolare $F(-3,3)$ punto di flesso, $M(3,2)$ punto di massimo rel., $r:\ y = 5$, $s:\ y = -6x + 36$ asintoti, $u:\ y = -2x - 3$, $t:\ y = -\dfrac{1}{2}x$ e $v:\ y = x$ tangenti o semitangenti). Detta $g(x) = f\,'(x)$ la funzione derivata prima di f, si determinino dominio, segno, intervalli di crescenza e decrescenza, le coordinate dei punti di massimo o minimo relativo, i limiti agli estremi del dominio di g e si disegni un grafico per g coerente con le informazioni ricavate.



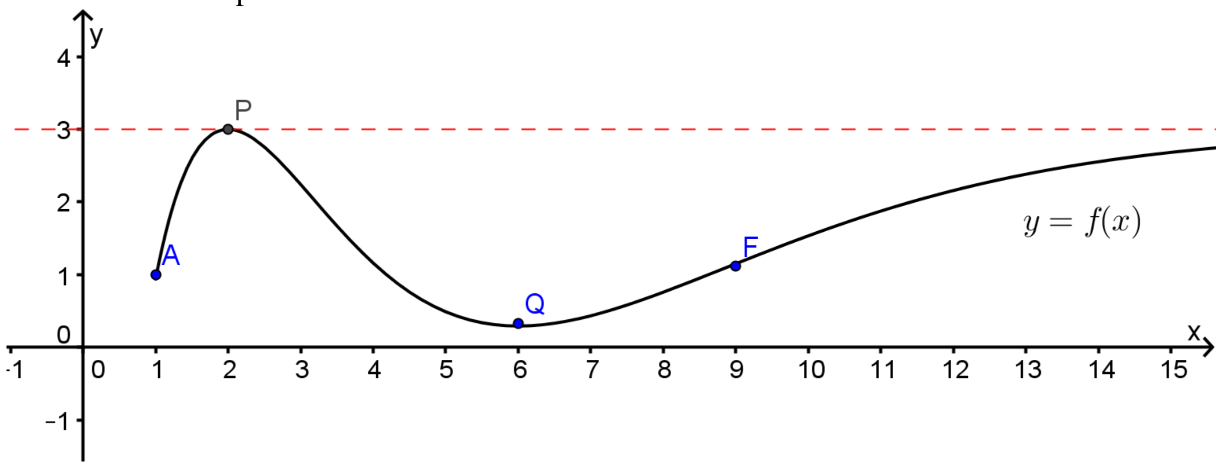
5. Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale definita su $\mathbb{R}$ e ivi continua; sapendo che $\int_0^1 f(x)dx = 2$, $\int_0^5 f(x)dx = 10$ e che $\int_1^2 \left(x \cdot f(x)\right) dx = 18$, calcolare, se possibile, $A = \int_0^2 f(2x+1)\,dx$ e $B = \int_1^4 f\left(\sqrt{x}\right) dx$.

6. Si consideri la funzione $f(x) = x^3$. Applicando a tale funzione il teorema (del valor medio) di Lagrange nell'intervallo $[a,1]$ con $0 < a < 1$, si dimostri che esiste un solo punto c, interno ad $[a,1]$, in cui risulta $f'(c) = a^2 + a + 1$. Si mostri inoltre che questo numero c verifica la condizione $\frac{a+1}{2} < c < 1$.

7. La funzione $y = f(x)$ è definita e derivabile, insieme alle sue derivate prima e seconda, in $[1;+\infty[$ e in figura è disegnato il grafico Λ di f. Esso presenta un massimo assoluto in $P(2;3)$, un minimo assoluto in $Q\left(6;\frac{1}{3}\right)$ e un flesso a tangente obliqua in $F\left(9;\frac{11}{10}\right)$.

a) Si tracci un grafico plausibile della primitiva $y = F(x)$ di f passante per il punto $B(2;4)$

b) La funzione $y = f(x)$ descrive, in opportune unità di misura, l'andamento della produzione dell'acciaio in Italia dal 2005 (punto A) ad oggi ed in proiezione futura, ossia $x = 1$ corrisponde all'anno 2005, $x = 2$ corrisponde all'anno 2006 e così via. A partire dal grafico si descriva l'andamento di tale produzione. Quali informazioni si possono dedurre dal fatto che la curva presenta un flesso e un asintoto orizzontale?



8. La forza gravitazionale F esercitata dalla Terra su una massa unitaria posta a distanza r dal centro della Terra è espressa in funzione di tale distanza da:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se} \quad r < R \\[2ex] \dfrac{GM}{r^2} & \text{se} \quad r \geq R \end{cases}$$

ove G è la costante di gravitazione universale, R è il raggio della Terra e M la massa della Terra.
La funzione $F(r)$:

a) è continua
b) presenta una discontinuità eliminabile per $r = R$
c) presenta un salto per $r = R$
d) presenta un asintoto per $r = R$

Si motivi esaurientemente la risposta.

9. Una scatola chiusa, avente la forma di un parallelepipedo rettangolo a base quadrata, ha volume uguale a 16000 cm^3. Il materiale per il coperchio e per la base costa 3 euro al cm^2 mentre il materiale per le pareti laterali costa 1,5 euro al cm^2.

a) Quali sono le dimensioni della scatola che minimizzano il costo per realizzarla?
b) Qual è il costo minimo per realizzare la scatola?

10. Il tetraedro regolare è uno dei cinque solidi platonici; si dice che Einstein, ma quasi certamente è solo una leggenda, a un convegno, criticato per la sua concezione di uno spazio-tempo a quattro dimensioni, chiese ai presenti di costruire quattro triangoli equilateri con sei stuzzicadenti e nessuno riuscì a posizionare su un piano gli stuzzicadenti per formare i triangoli richiesti, il che appunto è impossibile. Allora Einstein costruì un tetraedro con i sei bastoncini e commentò: "Se non sapete usare la terza dimensione, che sperimentate tutti i giorni, come sperate di capire la quarta?"

Si consideri il tetraedro regolare di spigolo l.
Una e una sola delle seguenti affermazioni è falsa:

a. l'angolo diedro tra le sue facce (cioè l'angolo individuato da una sezione normale allo spigolo) vale $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$;

b. il volume del tetraedro vale $\frac{\sqrt{2}}{12} l^3$;

c. l'altezza (cioè distanza fra vertice e faccia opposta) vale $\frac{\sqrt{3}}{6} l$;

d. la superficie totale del tetraedro vale $\sqrt{3}\, l^2$.

Stabilire quale affermazione è falsa, motivando esaurientemente la risposta.