LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna
Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2011-2012
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____					Classe 5^ sez. ____
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva <u>uno</u> dei due problemi e <u>cinque</u> dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Data la funzione reale f di variabile reale definita da $f(x) = x - \frac{1}{2} + \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

a) Studiare la funzione f e tracciare in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani $0xy$, la curva γ rappresentazione grafica di f.

b) Determinare le coordinate del punto F di intersezione della γ con la retta $r:\ 2x - 2y - 1 = 0$. Verificare che il punto F è il punto di flesso di γ e che è anche centro di simmetria per la curva γ.

c) Verificare che nell'intervallo $\left[\frac{3}{2};\, 2\right]$ vi è una sola intersezione della curva γ con l'asse x e, mediante l'applicazione di un metodo iterativo di calcolo, se ne trovi il valore approssimato a meno di 10^{-2}.

d) Calcolare l'area della superficie piana delimitata dalla retta $r:\ 2x - 2y - 1 = 0$, dalla curva γ e dalle rette di equazioni $x = 2$ e $x = 3$.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni reali definite da: $f(x) = \dfrac{2x^2 + k(3x-1)}{(x-1)^3}, \quad k \in \mathbb{R}$.

a) Mostrare che tutte le curve che rappresentano le funzioni della famiglia passano per uno stesso punto P di cui si chiedono le coordinate. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di intersezioni delle curve rappresentate dalle funzioni della famiglia con l'asse *x*.

b) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, l'esistenza e il numero di punti di estremo relativo delle curve rappresentate dalle funzioni della famiglia e scrivere l'equazione cartesiana del luogo dei punti di estremo relativo. Verificare che il punto P appartiene al luogo .

c) Determinare il valore di k in modo che il grafico λ della funzione della famiglia data abbia un minimo relativo nel punto di ascissa $x = -\frac{7}{2}$. Dopo aver verificato che la funzione corrispondente è $f(x) = \dfrac{4x^2 + 3x - 1}{2(x-1)^3}$, si studi la funzione ottenuta determinando l'equazione della tangente inflessionale.
Rappresentare il grafico λ rispetto ad un sistema di assi cartesiani xOy.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva λ e dall'asse *x*. (*Per la risoluzione dell'integrale, applicare la sostituzione* $x - 1 = t$).

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. Studiare la derivabilità della funzione $f(x) = \arcsin\sqrt{2x - x^2}$ nel suo dominio. Motivare *esaurientemente* tutte le affermazioni.

2. Si consideri una piramide regolare a base quadrata $ABCD$ e vertice V. Sapendo che $\overline{AB} = 2$ e che $\overline{AC} : \overline{AV} = 6 : 5$, determinare l'ampiezza dell'angolo α compreso tra una faccia laterale della piramide e la base. Esprimere il valore di α approssimato in gradi, primi e secondi (sessagesimali).

3. Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x & \text{se } x \le 0 \\ x^2 - 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

determinare per quale valore del parametro $a \in \mathrm{R}$ la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $I = [-\pi ; 3]$. Per il valore di a trovato, determinare i punti che in I verificano la tesi del teorema.

4. Date le affinità di equazioni $\alpha_1 : \begin{cases} x' = 2x - y - 1 \\ y' = x + 2y + 1 \end{cases}$ e $\alpha_2 : \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$

a) determinare l'espressione analitica di $\alpha_1 \circ \alpha_2$ e classificare quest'affinità;
b) determinare il perimetro e l'area del quadrilatero che corrisponde ad un quadrato il cui lato misura 2 nella trasformazione $\alpha_1 \circ \alpha_2$.

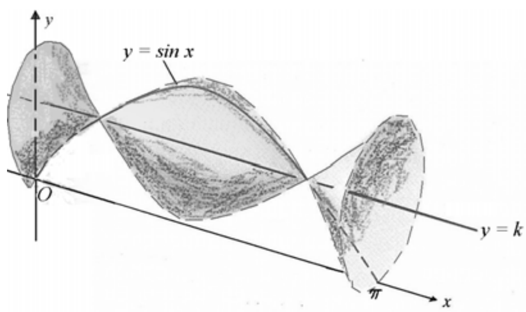
5. Si considerino le parabole $y^2 = 4a(a - x)$ e $y^2 = 4b(b + x)$ con $a > 0$ e $b > 0$, si dimostri che
a. hanno un fuoco in comune, lo stesso per ogni a e b;
b. le parabole si intersecano nei punti di coordinate $(a - b; \pm 2\sqrt{ab})$;
c. ogni parabola caratterizzata da a è ortogonale ad ogni parabola caratterizzata da b (*si ricorda che due curve si dicono ortogonali se le loro tangenti sono mutualmente perpendicolari in ogni punto in cui si intersecano*).

6. Calcolare l'area della regione R finita di piano delimitata dalle curve di equazione $y = e^{-x}$ e $y = \sqrt{2x + 1}$, dalla retta di equazione $x = t$, con $t = 2$, e dall'asse x. Rappresentare graficamente la regione R. Determinare poi il valore che assume tale area se la retta $x = t$ è variabile con $t \to +\infty$.

7. Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2)\,dt}{x\sqrt{x}}$ ed enunciare i teoremi utilizzati.

8. Risolvere in **N** la disequazione seguente: $\binom{x}{3} + \binom{x+1}{x-1} \le 14$.

9. L'arco di curva di equazione $y = \sin x$ nell'intervallo $[0; \pi]$ viene fatto ruotare attorno alla retta $y = k$ per generare il solido rappresentato nella figura accanto. *a*) Calcolare il volume $V(k)$ del solido; *b*) trovare il valore di k che minimizza il volume trovato.



10. Usando la regola di De L'Hôpital e il principio di induzione si dimostri che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0$$

per ogni numero intero positivo n.