LICEO SCIENTIFICO STATALE
“ENRICO FERMI”
Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna
Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2011-2012
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____				Classe 5^ sez. ____	
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva <u>uno</u> dei due problemi e <u>cinque</u> dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Data la funzione reale f di variabile reale definita da $f(x) = x - \frac{1}{2} + \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

a) Studiare la funzione f e tracciare in un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani $0xy$, la curva γ rappresentazione grafica di f.

b) Determinare le coordinate del punto F di intersezione della γ con la retta $r:\ 2x - 2y - 1 = 0$. Verificare che il punto F è il punto di flesso di γ e che è anche centro di simmetria per la curva.

c) Verificare che nell’intervallo $\left[\frac{3}{2};\, 2\right]$ vi è una sola intersezione della curva γ con l’asse delle ascisse e motivare esaurientemente le affermazioni.

d) Calcolare l’area della superficie piana delimitata dalla retta $r:\ 2x - 2y - 1 = 0$, dalla curva γ e dalle rette di equazioni $x = 2$ e $x = 3$.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni reali definite da: $f(x) = \frac{2x^2 + k(3x-1)}{(x-1)^3}$, $k \in \mathbb{R}$.

a) Mostrare che tutte le curve che rappresentano le funzioni della famiglia passano per uno stesso punto P di cui si chiedono le coordinate. Discutere al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di intersezioni delle curve rappresentate dalle funzioni della famiglia con l’asse *x*.

b) Discutere, al variare di k in $\mathbb{R}$, l’esistenza e il numero di punti di estremo relativo delle curve rappresentate dalle funzioni della famiglia e scrivere l’equazione cartesiana del luogo dei punti di estremo relativo. Verificare che il punto P appartiene al luogo .

c) Determinare il valore di k in modo che il grafico λ della funzione della famiglia data abbia un minimo relativo nel punto di ascissa $x = -\frac{7}{2}$. Dopo aver verificato che la funzione corrispondente è $f(x) = \frac{4x^2 + 3x - 1}{2(x-1)^3}$, si studi la funzione ottenuta determinando l’equazione della tangente inflessionale.
Rappresentare il grafico λ rispetto ad un sistema di assi cartesiani xOy.

d) Calcolare l’area della regione finita di piano delimitata dalla curva λ e dall’asse *x*. (*Per la risoluzione dell’integrale, applicare la sostituzione* $x - 1 = t$).

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l’uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l’aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. Studiare la derivabilità della funzione $f(x)=\arcsin\sqrt{2x-x^2}$ nel suo dominio. Motivare *esaurientemente* tutte le affermazioni.

2. Si consideri una piramide regolare a base quadrata $ABCD$ e vertice V. Sapendo che $\overline{AB}=2$ e che $\overline{AC}:\overline{AV}=6:5$, determinare l'ampiezza dell'angolo α compreso tra una faccia laterale della piramide e la base. Esprimere il valore di α approssimato in gradi , primi e secondi (sessagesimali).

3. Sia data la funzione
$$f(x)=\begin{cases} a\sin x & \text{se } x\le 0 \\ x^2-3x & \text{se } x>0 \end{cases}$$

Determinare per quale valore del parametro $a\in\mathbb{R}$ la funzione f verifica le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $I=[-\pi;3]$. Per il valore di a trovato, determinare i punti che in I verificano la tesi del teorema.

4. Un turista vede nel deserto la cima di una duna sotto un angolo di elevazione **(*)** di $20°$. Camminando in linea retta si avvicina alla duna di 400 m e l'angolo di elevazione diventa di $40°$. Qual è l'altezza della duna ?

(*) (*angolo di elevazione = angolo formato dal raggio visivo con la retta orizzontale passante per l'occhio dell'osservatore, ossia l'inclinazione di cui occorre alzare lo sguardo per vedere la cima della duna*.)

5. Nella famiglia di funzioni di equazione $y=e^{2x}-4e^x+kx$ con $k\in\mathbb{R}$, determinare:

a. il punto P comune a tutte le curve che rappresentano le funzioni della famiglia e verificare che P è il punto di flesso;
b. per quali valori di k le funzioni **non** hanno punti di estremo relativo;
c. per quali valori di k le funzioni hanno **un solo** punto di estremo relativo;
d. per quali valori di k le funzioni hanno **esattamente** due punti di estremo relativo.

6. Calcolare l'area della regione R finita di piano delimitata dalle curve di equazione $y=e^{-x}$ e $y=\sqrt{2x+1}$, dalla retta di equazione $x=t$, con $t=2$, e dall'asse x. Rappresentare graficamente la regione R. Determinare poi il valore che assume tale area se la retta $x=t$ è variabile con $t\to+\infty$.

7. Calcolare il seguente limite $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^2)\,dt}{x\sqrt{x}}$ ed enunciare i teoremi utilizzati.

8. Risolvere in **N** la disequazione seguente: $\binom{x}{3}+\binom{x+1}{x-1}\le 14$.

9. Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa $\overline{BC}=a$ in cui l'angolo $A\hat{B}C=x$. Sia A' il simmetrico di A rispetto a BC. Determinare x in modo che il volume del solido generato dalla rotazione di $180°$ del triangolo $AA'C$ attorno alla retta BC sia massimo.

10. Dimostrare che se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ continue in uno stesso intervallo $I\subseteq\mathbb{R}$, tali che $f'(x)=g'(x)\ \forall x\in I$, allora esse differiscono per una costante in I.

Date le funzioni $f(x)=2\log_2 x$ e $g(x)=\log_2(3x)^2$, verificare che $f'(x)=g'(x)$. Determinare la costante per cui differiscono le funzioni $f(x)$ e $g(x)$.