LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna
Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2010-2011
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI

Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:________________________				Classe 5^ sez. ____	
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

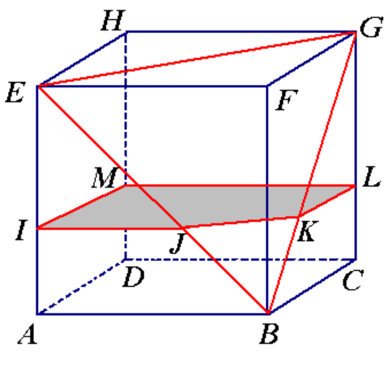
Il candidato risolva <u>uno</u> dei due problemi e <u>cinque</u> dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta tangente in A alla semicirconferenza nello stesso semipiano che contiene la semicirconferenza stessa. Detto M un punto di detta semiretta, condurre da M l'ulteriore tangente alla semicirconferenza: chiamare B il punto di tangenza e K il punto di intersezione del segmento OM con la semicirconferenza. Posto $A\hat{O}M = x$:

a) determinare in funzione di x il perimetro $p(x)$ del quadrilatero $ACBK$;
b) determinare in funzione di x l'area $a(x)$ dello stesso quadrilatero.
c) Verificato che l'area è data dall'espressione $a(x) = r^2 \sin x \cdot (1 + \cos x)$, posto $r = 1$, studiare la funzione $a(x)$ e rappresentare il suo grafico γ nell'intervallo $[0; 2\pi]$. Evidenziare nel grafico γ la parte relativa ai limiti imposti dal problema geometrico e interpretare da un punto di vista geometrico i casi limite .
d) Verificare che sia l'area $a(x)$ sia il perimetro $p(x)$ assumono il loro valore massimo per lo stesso valore di x.
e) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della parte piano delimitata dalla curva γ e dalle rette $x = 0$ e $x = \pi$.

PROBLEMA 2



Dato il cubo $ABCDEFGH$ di spigolo a, si consideri il solido $ABCDEGH$ ottenuto togliendo al cubo il tetraedro $BEFG$.

a) Calcolare il volume V del solido $ABCDEGH$.
b) La sezione di quest'ultimo solido ($ABCDEGH$) ottenuta con un piano parallelo alla faccia $ABCD$ è il pentagono *IJKLM;* indicata con x la distanza $\overline{AI}$, determinare in funzione di x il volume $V(x)$ del solido $ABCDIJKLM$.
c) Dimostrare che esiste un solo $0 < x_0 < a$ tale che $V(x_0) = \frac{V}{2}$.
d) Verificato che il volume è $V(x) = a^2 x - \frac{1}{6}x^3$, prescindendo dalla questione geometrica, si studi la famiglia di funzioni al variare di $a > 0$. Posto poi $a = 1$, si tracci il grafico γ della funzione ottenuta.
e) Calcolare l'area della parte di piano compresa tra la curva γ , l'asse delle ascisse e le rette $x = -\sqrt{6}$ e $x = \sqrt{6}$.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

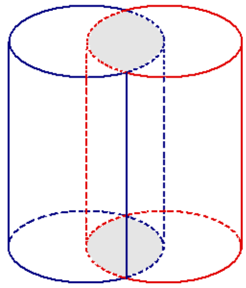
1. In un riferimento cartesiano Oxy, individuare i punti del piano soddisfano la disequazione

$$\left(9x^2+4y^2-36\right)\left(4x^2+9y^2-36\right)\le 0$$

Si rappresenti la soluzione graficamente nel piano Oxy.

2. Un punto $P(x,y)$ si muove nel piano in modo tale che $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{t+2}$ e $\dfrac{dy}{dt}=2t$ per $t\ge 0$.

a) Esprimere x e y come funzioni di t se $x=\ln 2$ e $y=1$ quando $t=0$.
b) Esprimere y in funzione di x.
c) Esprimere x in funzione di y.
d) Trovare il valore medio della funzione $g(x)=\dfrac{dy}{dx}$ al variare di t tra 0 e 2.



3. Il solido nella figura accanto è formato da due cilindri congruenti circolari aventi altezza h e raggio di base r che si intersecano in modo tale che l'asse di ognuno sia generatrice dell'altro. Determinare la superficie laterale e il volume del solido in questione .

4. John Napier (*Nepero, italianizzato*), che inventò i logaritmi naturali, fu la prima persona a rispondere alla domanda *"Che cosa accade se si investe una quantità di denaro all'interesse del 100%, con capitalizzazione continua degli interessi maturati?"*. Tenendo presente che se con A_0 si indica il montante iniziale e con r l'interesse annuo fisso, il montante dopo t anni è $A(t)=A_0\,e^{rt}$, rispondere alle seguenti domande

a. "Che cosa accade?"
b. Quanto tempo deve trascorrere affinché la quantità di denaro raddoppi?
c. Quanto può fruttare questo investimento in un anno?

5. In un giorno di sole una sfera è posata su un terreno piano orizzontale. Ad un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 m dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 m posta verticalmente al terreno proietta un'ombra lunga 2 m. Trovare qual è il raggio della sfera ed esprimere il suo valore in metri?

6. Data l'equazione $(m-1)x^2-2(m-1)x+3m-1=0$ con $m\in R,\ m\ne 1$, determinare, nel caso in cui le radici x_1 *e* x_2 dell'equazione data siano *reali e positive*, per quale valore di m il prodotto $p(m)=x_1\cdot x_2$ è massimo.

7. Sia $\{a_n : n\in N,\ n>1\}$ la successione di termine generale $a_n=\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$.

8. Date le funzioni $f(x)=\arccos x$ e $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arctan\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ***(a)*** determinare il campo di esistenza di ciascuna funzione; ***(b)*** dimostrare che $f(x)=g(x)\quad \forall x\in\,]-1;1[$.

9. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, determinare l'area della regione di piano, nel primo quadrante, delimitata superiormente dal grafico della funzione $y=\arcsin x$ e inferiormente dal grafico della funzione $y=\arccos x$.

10. Dato l'integrale $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$, stimare il numero minimo di suddivisioni necessarie per approssimare l'integrale con un errore il cui valore assoluto sia minore di 10^{-4} mediante ***(a)*** il metodo di integrazione dei trapezi e ***(b)*** il metodo di integrazione di Cavalieri Simpson; *oppure mediante due qualsiasi metodi di integrazione studiati*.