LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna
Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2010-2011
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____				Classe 5^ sez. ____	
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AC} = 2r$ e centro O, tracciare la semiretta tangente in A alla semicirconferenza nello stesso semipiano che contiene la semicirconferenza stessa. Detto M un punto di detta semiretta, condurre da M l'ulteriore tangente alla semicirconferenza: chiamare B il punto di tangenza e K il punto di intersezione del segmento OM con la semicirconferenza. Posto $A\hat{O}M = x$:

a) determinare in funzione di x il perimetro $p(x)$ del quadrilatero $ACBK$;
b) determinare in funzione di x l'area $a(x)$ dello stesso quadrilatero.
c) Verificato che l'area è data dall'espressione $a(x) = r^2 \sin x \cdot (1+\cos x)$, posto $r=1$, studiare la funzione $a(x)$ e rappresentare il suo grafico γ nell'intervallo $[0; 2\pi]$. Evidenziare nel grafico γ la parte relativa ai limiti imposti dal problema geometrico e interpretare da un punto di vista geometrico i casi limite .
d) Verificare che sia l'area $a(x)$ sia il perimetro $p(x)$ assumono il loro valore massimo per lo stesso valore di x .
e) Calcolare il volume del solido ottenuto dalla rotazione completa attorno all'asse x della parte piano delimitata dalla curva γ e dalle rette $x=0$ e $x=\pi$.

PROBLEMA 2

Si consideri la famiglia di funzioni reali definite da: $f : x \mapsto e^{2x} - (\lambda+1)e^x + 3\lambda$ con $\lambda \in R$ e $\lambda > -1$.

a) Mostrare che tutte le curve che rappresentano le funzioni della famiglia hanno un asintoto orizzontale.
b) Per ciascun valore di $\lambda > -1$ determinare, in funzione di λ, l'ascissa del punto M della famiglia di funzioni la cui retta tangente è parallela all'asse x e mostrare che questo punto corrisponde ad un minimo per ogni curva della famiglia.
c) Si consideri la curva del fascio passante per l'origine degli assi cartesiani. Si studi la funzione ottenuta determinando anche crescenza, decrescenza, punti di massimo, minimo e flesso. Rappresentare il grafico γ rispetto ad un sistema di assi cartesiani xOy .
d) Essendo $k \in R$ con $k<0$, determinare l'area $A(k)$ della parte di piano compresa fra la curva γ , l'asse delle ascisse e le rette $x=k$ e $x=0$. Calcolare quindi $\lim_{k\to-\infty} A(k)$ e interpretare geometricamente il risultato ottenuto.
e) Calcolare il volume del solido che si ottiene dalla rotazione completa intorno all'asse x della parte piano delimitata dalla curva γ e dalle rette $x=0$ e $x=\frac{1}{2}$.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

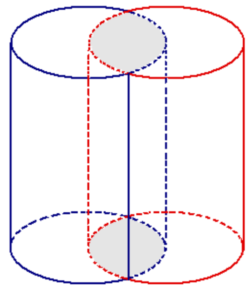
1. Siano p e q due numeri positivi, con $q < p$. Se r è un terzo numero, dimostrare che l'equazione

$$\frac{x^2}{p-r} + \frac{y^2}{q-r} = 1$$

rappresenta : ***(a)*** un'*ellisse* se $r < q$; ***(b)*** un'*iperbole* se $q < r < p$; ***(c)*** *nessuna curva* se $p < r$.
Si dimostri poi che tutte queste ellissi e iperboli hanno gli stessi fuochi e si trovino le coordinate di questi fuochi.

2. Considerare la funzione $f(x) = x - \sqrt{x}$. Determinare per quale valore di $k \in R$ il valore medio della funzione è $\frac{2}{3}$ nell'intervallo $[0; k]$ con $k > 0$.

3. Il solido nella figura accanto è formato da due cilindri congruenti circolari aventi altezza h e raggio di base r che si intersecano in modo tale che l'asse di ognuno sia generatrice dell'altro. Determinare la superficie laterale e il volume del solido in questione .



4. Data la funzione $f(x) = \frac{1-e^{1-x}}{1+e^{1+x}}$, ***(a)*** verificare che la funzione $y = f(x)$ è invertibile; detta $g(y) = f^{-1}(y)$ la funzione inversa di $f(x)$, ***(b)*** determinare la derivata $g'(y)$ per $y = 0$.

5. In un giorno di sole una sfera è posata su un terreno piano orizzontale. Ad un certo istante l'ombra della sfera raggiunge la distanza di 10 m dal punto in cui la sfera tocca il terreno. Nello stesso istante un'asta di lunghezza 1 m posta verticalmente al terreno proietta un'ombra lunga 2 m. Trovare qual è il raggio della sfera ed esprimere il suo valore in metri.

6. Data l'equazione $(m-1)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 1 = 0$ con $m \in R$, $m \neq 1$, determinare, nel caso in cui le radici x_1 *e* x_2 dell'equazione data siano *reali e positive*, per quale valore di m il prodotto $p(m) = x_1 \cdot x_2$ è massimo.

7. Sia $\{a_n : n \in N, n > 1\}$ la successione di termine generale $a_n = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx$. Calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n$.

8. Date le funzioni $f(x) = \arccos x$ e $g(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, ***(a)*** determinare il campo di esistenza di ciascuna funzione; ***(b)*** dimostrare che $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \left]-1; 1\right[$.

9. In un sistema di riferimento cartesiano Oxy, determinare l'area della regione di piano, nel primo quadrante, delimitata superiormente dal grafico della funzione $y = \arcsin x$ e inferiormente dal grafico della funzione $y = \arccos x$.

10. Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \left(1-e^{-t}\right)dt}{\sin^2 x}$ ed enunciare i teoremi utilizzati.