LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna
Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2009-2010
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____________________					Classe__________
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, è data una circonferenza λ con centro nell'origine O degli assi e raggio unitario.

a) Determinare le equazioni delle due cubiche γ_1 e γ_2 passanti per O, per gli estremi A e B del diametro della circonferenza λ appartenenti all'asse x e tangenti internamente alla circonferenza stessa (in punti diversi da A e B) e determinare le coordinate dei quattro punti di tangenza.

b) Ottenute le equazioni $y = 2x^3 - 2x$ e $y = -2x^3 + 2x$ delle cubiche γ_1 e γ_2 rispettivamente, si traccino i loro grafici e quello della circonferenza nel medesimo piano cartesiano xOy.

c) Calcolare le aree delle regioni di piano in cui le curve ottenute dividono il cerchio delimitato da λ.

d) Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 360°, attorno all'asse x, il triangolo mistilineo (delimitato dagli archi di circonferenza e dalle cubiche) di vertici i due punti di tangenza di ordinata positiva e l'origine O degli assi.

PROBLEMA 2

Data la funzione
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n(1-\log|x|) & per \quad x \neq 0 \\ 0 & per \quad x = 0 \end{cases} \qquad n \in N\,,$$

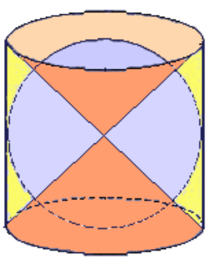
a) Verificare che $f_n(x)$ è continua in $x_0 = 0$ e discutere, al variare di n, la derivabilità di $f_n(x)$ in $x_0 = 0$

b) Studiare al variare di n il segno della funzione $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

c) Studiare e rappresentare graficamente la funzione $f_2(x)$, che si ottiene da $f_n(x)$ per $n = 2$.

d) Calcolare $I_n = \int_1^e f_n(x)\,dx$ e successivamente $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

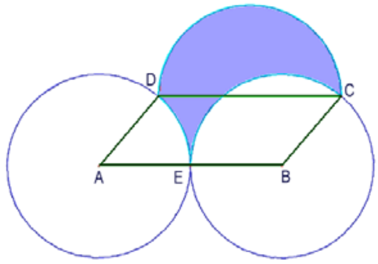
QUESTIONARIO



1. Dato un cilindro, si consideri la sfera di raggio r in esso inscritta e una clessidra con le basi coincidenti con quelle del cilindro dato (*vedi figura*) . Determinare: *a)* il rapporto tra il volume del cilindro e quello della sfera; *b)* il rapporto tra il volume della sfera e quello della clessidra.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

2. Considerare due circonferenze di centro A e B, aventi ugual raggio e tangenti esternamente nel punto E .(*vedi in figura*) e siano AD e BC due raggi paralleli. Si consideri la *lunula* delimitata dagli archi di circonferenza ED, EC e dalla semicirconferenza di diametro CD. La *figura geometrica delimitata dalle tre semicirconferenze* è detta ***drepanoide*** (dal greco: *a forma di falce*). Dimostrare che: *a)* il ***drepanoide*** è equivalente al parallelogramma $ABCD$; *b)* la lunghezza del contorno del ***drepanoide*** è uguale alla lunghezza di una delle due circonferenze.



3. In un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy si consideri la parabola λ di equazione $y=-x^2+4x-3$. Considerare la trasformazione τ di equazioni $\begin{cases} x=kX & (k>0) \\ y=hY & (h>0) \end{cases}$ e si sottoponga la curva λ alla trasformazione τ . *a)* Determinare i parametri k e h in modo che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico di λ determinato dall'asse delle x si trasformi in un quadrato equivalente. *b)* Calcolare l'area dello stesso segmento parabolico.

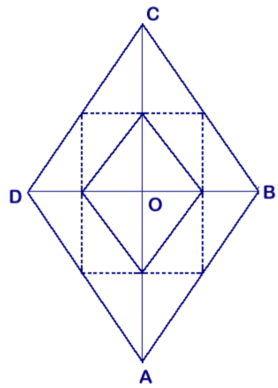
4. Si narra che *Romeo*, nascosto in giardino, scrutasse la sua amata *Giulietta*, affacciata alla finestra in cima ad una alta torre, sotto un angolo di elevazione di $28°\,30'$ (*angolo di elevazione è l'angolo formato con la direzione orizzontale dalla semiretta che unisce l'occhio di Romeo con il volto di Giulietta*). Avanzando di $40\,m$ verso la torre, l'angolo di elevazione diventava di $43°\,15'$. Determinare a quale altezza si trovava il volto di Giulietta, sapendo che il suolo del giardino in cui si trovava Romeo era orizzontale e che lo stesso Romeo era alto $1{,}65\,m$.

5. Noto che $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$, calcolare un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

6. Enunciare la definizione di coefficiente binomiale e le sue principali proprietà. Dimostrare che

$$(n-k)\binom{n}{k}=(k+1)\binom{n}{k+1}=n\binom{n-1}{k}$$

7. Dette $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ le diagonali del rombo $ABCD$, che misurano rispettivamente $8a$ e $6a$, considerare i punti medi dei lati del rombo e poi il rettangolo che ha tali punti come vertici. Successivamente considerare il rombo inscritto nel rettangolo trovato, *come indicato in figura*, e così via. *a)* Determinare la successione delle misure dei perimetri dei rombi inscritti nei rettangoli ottenuti. Dimostrare che le misure dei perimetri sono i termini di una progressione geometrica e calcolarne la ragione q. *b)* Scrivere il termine generico a_n di tale successione e determinare la somma S_{10} dei primi 10 termini. *c)* Calcolare il limite per $n\to+\infty$ di S_n.



8. In un piano cartesiano Oxy, si consideri la circonferenza γ di centro $C\left(0;\frac{a}{2}\right)$ e diametro a e la retta t ad essa tangente nel punto $A(0;a)$. Considerato un punto P variabile sulla circonferenza γ, sia Q il punto di incontro della parallela per P a t con la parallela all'asse y passante per il punto di incontro di t con la retta OP. Al variare di P su γ , il luogo geometrico λ descritto dal punto Q è noto con il nome di *versiera di Agnesi* (Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, 1718-1799) . *a)* Verificare che l'equazione cartesiana del luogo descritto da Q al variare di P su γ è $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ e tracciarne il grafico nel piano Oxy . *b)* Determinare l'area della regione di piano delimitata da λ e dal suo asintoto e verificare che il valore dell'area trovata è quattro volte quella del cerchio delimitato da γ .

9. Calcolare il valore medio V_m della funzione $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nell'intervallo $\left[0;\sqrt{3}\right]$ e , successivamente, determinare per quale valore di *x* in $\left[0;\sqrt{3}\right]$ la funzione assume il valore V_m trovato.

10. Verificare che la funzione $f(x)=\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+arctg\,x$ è continua in ***R***. Successivamente, determinare il suo insieme di derivabilità e stabilire se è applicabile il teorema di ***Rolle*** negli intervalli $[0;1]$ e $[-1;0]$. In caso affermativo, trovare i valori di x previsti dalla tesi del teorema.