



**LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"**

Sede: Via Mazzini n.172/2- 40139 Bologna

Sede Associata: Via Nazionale Toscana, 1 - 40068 San Lazzaro di Savena

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2009-2010
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI
Tema di: MATEMATICA**

Nome del Candidato: _____ Classe _____					
Problema n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____

Il candidato risolve uno dei due problemi e cinque dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

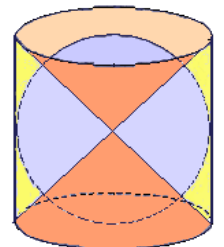
In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy , è data una circonferenza λ con centro nell'origine O degli assi e raggio unitario.

- Determinare le equazioni delle due cubiche γ_1 e γ_2 passanti per O , per gli estremi A e B del diametro della circonferenza λ appartenenti all'asse x e tangenti internamente alla circonferenza stessa (in punti diversi da A e B) e determinare le coordinate dei quattro punti di tangenza.
- Ottenute le equazioni $y = 2x^3 - 2x$ e $y = -2x^3 + 2x$ delle cubiche γ_1 e γ_2 rispettivamente, si traccino i loro grafici e quello della circonferenza nel medesimo piano cartesiano xOy .
- Calcolare le aree delle regioni di piano in cui le curve ottenute dividono il cerchio delimitato da λ .
- Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 360° , attorno all'asse x , il triangolo mistilineo (delimitato dagli archi di circonferenza e dalle cubiche) di vertici i due punti di tangenza di ordinata positiva e l'origine O degli assi.

PROBLEMA 2

Data la funzione
$$f_n(x) = \begin{cases} x^n(1 - \log|x|) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

- Verificare che $f_n(x)$ è continua in $x_0 = 0$ e discutere, al variare di n , la derivabilità di $f_n(x)$ in $x_0 = 0$
- Studiare al variare di n il segno della funzione $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
- Studiare e rappresentare graficamente la funzione $f_2(x)$, che si ottiene da $f_n(x)$ per $n = 2$.
- Calcolare $I_n = \int_1^e f_n(x) dx$ e successivamente $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



QUESTIONARIO

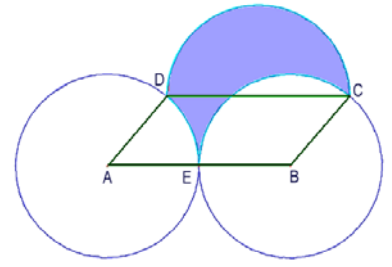
1. Dato un cilindro, si consideri la sfera di raggio r in esso inscritta e una clessidra con le basi coincidenti con quelle del cilindro dato (vedi figura). Determinare: a) il rapporto tra il volume del cilindro e quello della sfera; b) il rapporto tra il volume della sfera e quello della clessidra.

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

2. Considerare due circonferenze di centro A e B , aventi ugual raggio e tangenti esternamente nel punto E (vedi in figura) e siano AD e BC due raggi paralleli. Si consideri la *lunula* delimitata dagli archi di circonferenza ED , EC e dalla semicirconferenza di diametro CD . La figura geometrica delimitata dalle tre semicirconferenze è detta *drepanoide* (dal greco: a forma di falce). Dimostrare che: a) il *drepanoide* è equivalente al parallelogramma $ABCD$; b) la lunghezza del contorno del *drepanoide* è uguale alla lunghezza di una delle due circonferenze.



3. In un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy si consideri la parabola λ di equazione $y = -x^2 + 4x - 3$. Considerare la trasformazione τ di equazioni $\begin{cases} x = kX & (k > 0) \\ y = hY & (h > 0) \end{cases}$ e si sottoponga la curva λ alla trasformazione τ . a) Determinare i parametri k e h in modo che il rettangolo circoscritto al segmento parabolico di λ determinato dall'asse delle x si trasformi in un quadrato equivalente. b) Calcolare l'area dello stesso segmento parabolico.

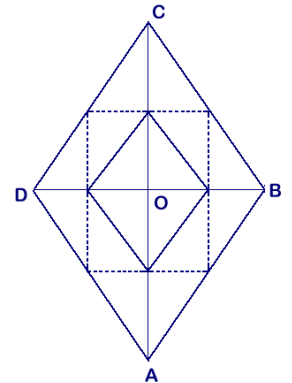
4. Si narra che *Romeo*, nascosto in giardino, scrutasse la sua amata *Giulietta*, affacciata alla finestra in cima ad una alta torre, sotto un angolo di elevazione di $28^\circ 30'$ (angolo di elevazione è l'angolo formato con la direzione orizzontale dalla semiretta che unisce l'occhio di *Romeo* con il volto di *Giulietta*). Avanzando di $40m$ verso la torre, l'angolo di elevazione diventava di $43^\circ 15'$. Determinare a quale altezza si trovava il volto di *Giulietta*, sapendo che il suolo del giardino in cui si trovava *Romeo* era orizzontale e che lo stesso *Romeo* era alto $1,65m$.

5. Noto che $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$, calcolare un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

6. Enunciare la definizione di coefficiente binomiale e le sue principali proprietà. Dimostrare che

$$(n-k) \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1} = n \binom{n-1}{k}$$

7. Dette \overline{AC} e \overline{DB} le diagonali del rombo $ABCD$, che misurano rispettivamente $8a$ e $6a$, considerare i punti medi dei lati del rombo e poi il rettangolo che ha tali punti come vertici. Successivamente considerare il rombo inscritto nel rettangolo trovato, come indicato in figura, e così via. a) Determinare la successione delle misure dei perimetri dei rombi inscritti nei rettangoli ottenuti. Dimostrare che le misure dei perimetri sono i termini di una progressione geometrica e calcolarne la ragione q . b) Scrivere il termine generico a_n di tale successione e determinare la somma S_{10} dei primi 10 termini. c) Calcolare il limite per $n \rightarrow +\infty$ di S_n .



8. In un piano cartesiano Oxy , si consideri la circonferenza γ di centro $C\left(0; \frac{a}{2}\right)$ e diametro a

e la retta t ad essa tangente nel punto $A(0; a)$. Considerato un punto P variabile sulla circonferenza γ , sia Q il punto di incontro della parallela per P a t con la parallela all'asse y passante per il punto di incontro di t con la retta OP . Al variare di P su γ , il luogo geometrico λ descritto dal punto Q è noto con il nome di *versiera di Agnesi* (Maria Gaetana Agnesi, matematica milanese, 1718-1799). a) Verificare che l'equazione cartesiana del luogo descritto da Q al variare di P su γ è $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ e tracciarne il grafico nel piano Oxy . b) Determinare l'area della regione di piano delimitata da λ e dal suo asintoto e verificare che il valore dell'area trovata è quattro volte quella del cerchio delimitato da γ .

9. Calcolare il valore medio V_m della funzione $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nell'intervallo $[0; \sqrt{3}]$ e, successivamente, determinare per quale valore di x in $[0; \sqrt{3}]$ la funzione assume il valore V_m trovato.

10. Verificare che la funzione $f(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \operatorname{arctg} x$ è continua in \mathbf{R} . Successivamente, determinare il suo insieme di derivabilità e stabilire se è applicabile il teorema di *Rolle* negli intervalli $[0; 1]$ e $[-1; 0]$. In caso affermativo, trovare i valori di x previsti dalla tesi del teorema.