M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2009-2010
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:______________________________					Classe__________
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque dei dieci quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali xOy, è dato il punto $A(-2;0)$. Condotta per A una retta r che forma col verso positivo dell'asse x un angolo α, sia r' la retta passante per l'origine O che forma col verso positivo delle'asse x un angolo 2α.

a) Trovare l'equazione del luogo geometrico γ descritto dal punto P, intersezione delle rette r e r' al variare di α nell'intervallo $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Ottenuta l'equazione del luogo $\gamma:\ x^2+y^2=4,\ y>0$, indicare con B il punto di intersezione di γ con l'asse y e con C il punto di coordinate $(2;0)$. Scrivere l'equazione della cubica $y=ax^3+bx^2+cx+d$, di grafico Λ, avente massimo relativo e minimo relativo, rispettivamente, nei punti B e C.

c) Studiare la funzione della cubica ottenuta e rappresentarne il grafico rispetto ad un sistema di assi cartesiani xOy. Calcolare l'area della superficie piana delimitata dalle curve γ e Λ.

d) Detta t la tangente *inflessionale* alla curva Λ e s la retta ad essa perpendicolare nel punto di flesso, calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare di 360° attorno all'asse x, il triangolo formato dalle rette t, s e dall'asse x.

PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x)=a\cdot\sin 2x+\cdot b\cdot\cos x$, $x\in R$,

a) determinare $a, b\in R$ in modo che risulti: $f(0)=2$ e $\int_o^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=\frac{5}{4}$;

b) verificato che ciò si ottiene per $a=1$, studiare nell'intervallo $[0;2\pi]$ la funzione ottenuta e tracciarne il grafico γ;

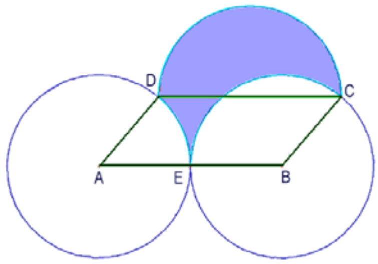
c) scrivere l'equazione $y=mx+q$ $(m\neq 0)$ della retta t tangente alla curva γ in uno dei suoi punti di flesso di ordinata nulla e calcolare l'area della parte di piano delimitata dall'asse y, dalla retta t e da γ;

d) calcolare l'area della superficie piana delimitata da γ e dall'asse delle ascisse x nell'intervallo $[0;2\pi]$.

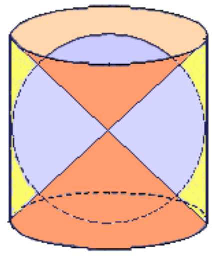
Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. Considerare due circonferenze di centro A e B, aventi ugual raggio e tangenti esternamente nel punto E .(*vedi in figura*) e siano AD e BC due raggi paralleli. Si consideri la *lunula* delimitata dagli archi di circonferenza ED, EC e dalla semicirconferenza di diametro CD. La *figura geometrica delimitata dalle tre semicirconferenze* è detta ***drepanoide*** (dal greco: *a forma di falce*). Dimostrare che: *a)* il ***drepanoide*** è equivalente al parallelogramma $ABCD$; *b)* la lunghezza del contorno del ***drepanoide*** è uguale alla lunghezza di una delle due circonferenze.



2. Un circuito, dotato di forza elettromotrice ε e resistenza r, interna al generatore stesso, presenta una resistenza R variabile. Determinare il valore di R affinché risulti massimo il valore della potenza $P = R\,i^2$, dove $i = i(t)$ è l'intensità della corrente che fluisce nel circuito nel tempo t. Calcolare, poi, il valore della potenza trovata nel caso in cui $\varepsilon = 12\,V$ e $r = 1{,}5\,\Omega$.



3. Dato un cilindro, si consideri la sfera di raggio r in esso inscritta e una clessidra con le basi coincidenti con quelle del cilindro dato (vedi figura) . Determinare: *a)* il rapporto tra il volume del cilindro e quello della sfera; *b)* il rapporto tra il volume della sfera e quello della clessidra.

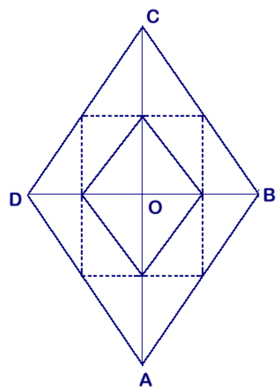
4. Si narra che *Romeo*, nascosto in giardino, scrutasse la sua amata *Giulietta*, affacciata alla finestra in cima ad una alta torre, sotto un angolo di elevazione di $28°\,30'$ (*<u>angolo di elevazione</u> è l'angolo formato con la direzione orizzontale dalla semiretta che unisce l'occhio di Romeo con il volto di Giulietta*). Avanzando di $40\,m$ verso la torre, l'angolo di elevazione diventava di $43°\,15'$. Determinare a quale altezza si trovava il volto di Giulietta, sapendo che il suolo del giardino in cui si trovava Romeo era orizzontale e che lo stesso Romeo era alto $1{,}65\,m$.

5. Sapendo che $x > 0$, $y > 0$ e $\log_2(3x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3x-y) = 3$ calcolare, *se possibile*, il valore del rapporto $\dfrac{x}{y}$. Motivare in modo esauriente la risposta.

6. Enunciare la definizione di coefficiente binomiale e le sue principali proprietà. Dimostrare che

$$(n-k)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n}{k+1} = n\binom{n-1}{k}$$

7. Dette $\overline{AC}$ e $\overline{DB}$ le diagonali del rombo $ABCD$, che misurano rispettivamente $8a$ e $6a$, considerare i punti medi dei lati del rombo e poi il rettangolo che ha tali punti come vertici. Successivamente considerare il rombo inscritto nel rettangolo trovato, *come indicato in figura*, e così via. *a)* Determinare la successione delle misure dei perimetri dei rombi inscritti nei rettangoli ottenuti. Dimostrare che le misure dei perimetri sono i termini di una progressione geometrica e calcolarne la ragione q. *b)* Scrivere il termine generico a_n di tale successione e determinare la somma S_{10} dei primi 10 termini. *c)* Calcolare il limite per $n \to +\infty$ di S_n.



8. Verificare che la funzione $f(x) = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} + arctg\,x$ è continua in **R**. Successivamente, determinare il suo insieme di derivabilità e stabilire se è applicabile il teorema di ***Rolle*** negli intervalli $[0;1]$ e $[-1;0]$. In caso affermativo, trovare i valori di x previsti dalla tesi del teorema.

9. Dopo aver individuato la circonferenza γ di centro l'origine degli assi cartesiani e passante per il punto $A(1;1)$, determinare l'equazione della parabola λ con vertice in A e passante per l'origine O. Calcolare l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalle due curve γ e λ nel loro punto di intersezione A. Determinare, poi, l'ampiezza espressa in gradi e primi (*sessagesimali*) dell'angolo α acuto formato dalle due tangenti alla parabola nei suoi punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

10. Calcolare il valore medio V_m della funzione $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ nell'intervallo $\left[0;\sqrt{3}\right]$ e , successivamente, determinare per quale valore di x in $\left[0;\sqrt{3}\right]$ la funzione assume il valore V_m trovato.