



LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2- 40139 BOLOGNA

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2008-2009
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato: _____					Classe _____
Problema n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____	Quesito n° _____

Il candidato risolve uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB , contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo TAB sia uguale a 2α radianti. Si conduca per T la retta tangente alla circonferenza e siano P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

- Esprimere il funzione di α il rapporto : $\frac{\overline{CP} + \overline{CQ}}{\overline{AT}}$.
- Posto $x = tg\alpha$, esprimere il rapporto trovato in funzione di x .
- Dopo aver verificato che si ottiene la funzione $f(x) = \frac{1 + 2x - x^2}{1 + x}$, si studi la $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico Λ , indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
- Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva Λ e l'asse delle x .
- Detti R e S i punti di intersezione di $f(x)$ con l'asse delle x , si determini il punto P di ascissa h appartenente all'arco della curva Λ di estremi R e S tale che il triangolo RSP abbia area uguale a $\sqrt{2}$.

PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x) = \frac{kx^2 - k + 1}{x^2 + 1}$ con $k \in R$,

- si studino le sue caratteristiche (*dominio, simmetrie, massimi e minimi*);
- si determini il valore di k in modo che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente alla curva di equazione $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ nel suo punto di minimo relativo;
- dopo aver verificato che la condizione del punto b) si ottiene per $k = 1$, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $f(x)$ così ottenuta, mettendone in evidenza anche i punti di flesso e trovando le equazioni delle tangenti inflessionali;
- considerato un punto P di ascissa positiva ed appartenente al grafico di f , si esprima in funzione dell'ascissa del punto P , l'area del triangolo PHA , dove H è la proiezione di P sull'asintoto ed A il punto di coordinate $(0; 1)$. Si determini, quindi, il punto P per cui risulta massima l'area del triangolo PHA .
- Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la retta $y = y_F$, dove y_F è l'ordinata dei punti di flesso, e il grafico di f .

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. Si consideri il triangolo rettangolo ed isoscele ABC di cateti $\overline{AC} = \overline{CB} = l$. Si tracci una retta parallela al lato AB che intersechi gli altri due lati rispettivamente in D e in E . Determinare la posizione di questa retta parallela in modo che risulti massimo il volume del solido generato dal triangolo ADE , in una rotazione completa attorno ad AB .
2. Un punto materiale P di massa $m = 2$ kg si muove lungo una retta r con equazione oraria: $s(t) = (t - 1)e^{-4t}$ per $t \geq 0$, (esprimendo s in metri e t in secondi) determinare:
 - a. gli istanti in cui la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ sono nulle;
 - b. i valori della velocità e dell'accelerazione nell'istante in cui P passa per l'origine;
 - c. la variazione della quantità di moto p se t passa da 0 a 0,5.
3. Dopo aver fornito la definizione di derivata di una funzione $f(x)$, applicando questa definizione calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sin^3 x$ nel punto di ascissa x .

4. Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x - x & \text{per } x < 0 \\ \cos^2 \pi x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$, studiarne la continuità e la derivabilità.

5. Data la funzione definita da: $f(x) = \begin{cases} a - \sin x & \text{per } x \leq 0 \\ bx + 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$
- a) Determinare i valori dei parametri reali a, b in modo che la funzione $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.
 - b) Determinare poi l'ascissa del punto previsto dalla tesi del teorema.

6. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \int_e^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt$ nel punto di ascissa $x_0 = \sqrt{e}$.

7. In un piano cartesiano, Oxy si considerino i punti $P(x; y)$ e $P'(x'; y')$. Si consideri la trasformazione:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

tale che al punto $A(1; 1)$ corrisponda il punto $A'(0; 2)$, ed al punto $B(1; 0)$ corrisponda il punto $B'(1; 0)$.
Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti uniti e le rette unite.

8. Con le lettere del cognome dello scienziato di cui il nostro liceo, FERMI, porta il nome si formino delle parole (aventi senso o non senso); in ogni parola ogni lettera compare una sola volta.
 - a. Quanti sono gli anagrammi della parola FERMI?
 - b. Quante di queste parole di cinque lettere finiscono per vocale?
 - c. Quante di queste parole di cinque lettere iniziano con FE?
9. Dati due dadi non truccati e identici. Quale fra i seguenti eventi ha probabilità maggiore?
 - a) In tre lanci di uno stesso dado il 5 esca soltanto una volta
 - b) In un lancio di due dadi la somma delle facce sia 8

10. Data la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$,

- a. determinare il numero delle radici dell'equazione $f(x) - x^2 = 0$;
- b. verificare che l'equazione $f(x) = x$ ammette due radici e fornire un valore approssimato a 10^{-1} della radice x positiva, utilizzando un metodo numerico opportuno.