LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2- 40139 BOLOGNA

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**
**A.S. 2008-2009**
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI PNI
**Tema di:** MATEMATICA

| Nome del Candidato:_______________________________________ | | | | Classe__________ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Problema n°_____ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ |

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***

## PROBLEMA 1

Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro *A* e raggio *AB*, contenuto nel quadrato, si prenda un punto *T* in modo che l'angolo $TAB$ sia uguale a $2\alpha$ radianti. Si conduca per *T* la retta tangente alla circonferenza e siano *P* e *Q* i punti in cui essa seca le rette *BC* e *CD* rispettivamente.

a) Esprimere il funzione di $\alpha$ il rapporto : $\dfrac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}}$.

b) Posto $x = tg\alpha$, esprimere il rapporto trovato in funzione di *x*.

c) Dopo aver verificato che si ottiene la funzione $f(x)=\dfrac{1+2x-x^2}{1+x}$, si studi la $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico $\Lambda$, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva $\Lambda$ e l'asse delle *x*.

e) Detti *R* e *S* i punti di intersezione di $f(x)$ con l'asse delle *x*, si determini il punto *P* di ascissa *h* appartenente all'arco della curva $\Lambda$ di estremi *R* e *S* tale che il triangolo *RSP* abbia area uguale a $\sqrt{2}$.

## PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x)=\dfrac{k\,x^2-k+1}{x^2+1}$ con $k \in R$,

a) si studino le sue caratteristiche (*dominio, simmetrie, massimi e minimi*);

b) si determini il valore di *k* in modo che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente alla curva di equazione $y=1-\sqrt{1-x^2}$ nel suo punto di minimo relativo;

c) dopo aver verificato che la condizione del punto b) si ottiene per $k=1$, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $f(x)$ così ottenuta, mettendone in evidenza anche i punti di flesso e trovando le equazioni delle tangenti inflessionali;

d) considerato un punto *P* di ascissa positiva ed appartenente al grafico di *f*, si esprima in funzione dell'ascissa del punto *P*, l'area del triangolo *PHA*, dove *H* è la proiezione di *P* sull'asintoto ed *A* il punto di coordinate $(0;1)$. Si determini, quindi, il punto *P* per cui risulta massima l'area del triangolo *PHA*.

e) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la retta $y = y_F$, dove $y_F$ è l'ordinata dei punti di flesso, e il grafico di *f*.

*Durata massima della prova: 5 ore.*
*È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.*
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

## *QUESTIONARIO*

**1.** Si consideri il triangolo rettangolo ed isoscele $ABC$ di cateti $\overline{AC}=\overline{CB}=l$. Si tracci una retta parallela al lato $AB$ che intersechi gli altri due lati rispettivamente in $D$ e in $E$. Determinare la posizione di questa retta parallela in modo che risulti massimo il volume del solido generato dal triangolo $ADE$, in una rotazione completa attorno ad $AB$.

**2.** Un punto materiale *P* di massa $m=2$ kg si muove lungo una retta *r* con equazione oraria: $s(t)=(t-1)\,e^{-4t}$ per $t \geq 0$, (esprimendo *s* in metri e *t* in secondi) determinare:

a. gli istanti in cui la velocità $v(t)$ e l'accelerazione $a(t)$ sono nulle;
b. i valori della velocità e dell'accelerazione nell'istante in cui *P* passa per l'origine;
c. la variazione della quantità di moto *p* se *t* passa da 0 a 0,5.

**3.** Dopo aver fornito la definizione di derivata di una funzione $f(x)$, applicando questa definizione calcolare la derivata della funzione $f(x)=\sin^3 x$ nel punto di ascissa $x$.

**4.** Sia data la funzione $f(x)=\begin{cases} e^x - x & per\ x<0 \\ \cos^2 \pi x & per\ 0 \leq x \leq 1 \\ 1+\dfrac{\ln x}{x} & per\ x>1 \end{cases}$, studiarne la continuità e la derivabilità.

**5.** Data la funzione definita da : $f(x)=\begin{cases} a-\sin x & per\ x \leq 0 \\ bx+1 & per\ x>0 \end{cases}$

a) Determinare i valori dei parametri reali $a, b$ in modo che la funzione $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[-\pi; \pi]$.

b) Determinare poi l'ascissa del punto previsto dalla tesi del teorema.

**6.** Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\int_e^{x^2} \frac{\ln t}{t}\,dt$ nel punto di ascissa $x_0=\sqrt{e}$.

**7.** In un piano cartesiano ,$Oxy$ si considerino i punti $P(x;\,y)$ e $P'(x';\,y')$. Si consideri la trasformazione:

$$\begin{cases} x'=a\,x+b\,y \\ y'=c\,x+d\,y \end{cases}$$

tale che al punto $A(1;1)$ corrisponda il punto $A'(0;\,2)$, ed al punto $B(1;\,0)$ corrisponda il punto $B'(1;\,0)$.
Si studi la trasformazione ottenuta determinando in particolare i punti uniti e le rette unite.

**8.** Con le lettere del cognome dello scienziato di cui il nostro liceo, FERMI, porta il nome si formino delle parole (aventi senso o non senso); in ogni parola ogni lettera compare una sola volta.

a. Quanti sono gli anagrammi della parola FERMI?
b. Quante di queste parole di cinque lettere finiscono per vocale?
c. Quante di queste parole di cinque lettere iniziano con FE?

**9.** Dati due dadi non truccati e identici. Quale fra i seguenti eventi ha probabilità maggiore?

a) In tre lanci di uno stesso dado il 5 esca soltanto una volta
b) In un lancio di due dadi la somma delle facce sia 8

**10.** Data la funzione definita da $f(x)=\begin{cases} x^2\,\ln|x| & per\ \ x \neq 0 \\ 0 & per\ \ x=0 \end{cases}$,

a. determinare il numero delle radici dell'equazione $f(x)-x^2=0$;
b. verificare che l'equazione $f(x)=x$ ammette due radici e fornire un valore approssimato a $10^{-1}$ della radice *x* positiva, utilizzando un metodo numerico opportuno.