LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2- 40139 BOLOGNA

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2008-2009
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO
Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____Classe__________					
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato il quadrato $ABCD$, sull'arco di circonferenza di centro A e raggio AB, contenuto nel quadrato, si prenda un punto T in modo che l'angolo TAB sia uguale a 2α radianti. Si conduca per T la retta tangente alla circonferenza e siano P e Q i punti in cui essa seca le rette BC e CD rispettivamente.

a) Esprimere il funzione di α il rapporto : $\dfrac{\overline{CP}+\overline{CQ}}{\overline{AT}}$.

b) Posto $x = tg\alpha$, esprimere il rapporto trovato in funzione di x.

c) Dopo aver verificato che si ottiene la funzione $f(x)=\dfrac{1+2x-x^2}{1+x}$, si studi la $f(x)$ così ottenuta e si tracci il suo grafico Λ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.

d) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva Λ e l'asse delle x.

e) Detti R e S i punti di intersezione di $f(x)$ con l'asse delle x, si determini il punto P di ascissa h appartenente all'arco della curva Λ di estremi R e S tale che il triangolo RSP abbia area uguale a $\sqrt{2}$.

PROBLEMA 2

Data la funzione $f(x)=\dfrac{k\,x^2-k+1}{x^2+1}$ con $k \in R$,

a) si studino le sue caratteristiche (*dominio, simmetrie, massimi e minimi*);

b) si determini il valore di k in modo che il grafico della funzione $f(x)$ sia tangente alla curva di equazione $y = 1-\sqrt{1-x^2}$ nel suo punto di minimo relativo;

c) dopo aver verificato che la condizione del punto b) si ottiene per $k=1$, si studi e si rappresenti graficamente la funzione $f(x)$ così ottenuta, mettendone in evidenza anche i punti di flesso e trovando le equazioni delle tangenti inflessionali;

d) considerato un punto P di ascissa positiva ed appartenente al grafico di f, si esprima in funzione dell'ascissa del punto P, l'area del triangolo PHA, dove H è la proiezione di P sull'asintoto ed A il punto di coordinate $(0;1)$. Si determini, quindi, il punto P per cui risulta massima l'area del triangolo PHA.

e) Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la retta $y = y_F$, dove y_F è l'ordinata dei punti di flesso, e il grafico di f.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. Si consideri il triangolo rettangolo ed isoscele ABC di cateti $\overline{AC} = \overline{CB} = l$. Si tracci una retta parallela al lato AB che intersechi gli altri due lati rispettivamente in D e in E. Determinare la posizione di questa retta parallela in modo che risulti massimo il volume del solido generato dal triangolo ADE, in una rotazione completa attorno ad AB.

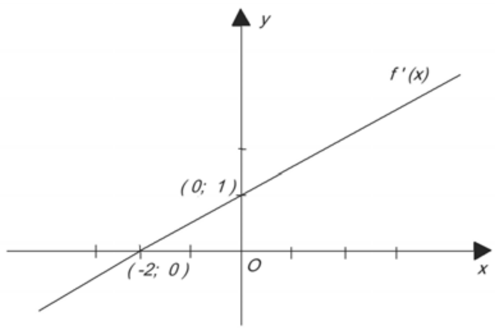
2. In un piano cartesiano, l'insieme dei punti verificanti la condizione $xy - 3x + 5y - 15 = 0$ è costituito :

a. dai punti di coordinate $(5; 0)$ e $(0; -3)$;
b. dai punti di coordinate $(-5; 0)$ e $(0; 3)$;
c. dall'intersezione delle rette di equazioni $x = -5$ e $y = 3$;
d. dall'unione delle rette di equazioni $x = -5$ e $y = 3$;
e. da una figura diversa dalle precedenti.

Una sola risposta è corretta. Individuarla fornendo una esauriente motivazione.

3. Dopo aver fornito la definizione di derivata di una funzione $f(x)$, applicando questa definizione calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sin^3 x$ nel punto di ascissa x.

4. Nella figura accanto è rappresentato il grafico della derivata prima $f'(x)$. Sapendo che $f(1) = 0$ si tracci il grafico della funzione $f(x)$. Si motivi in maniera esaustiva il grafico di $f(x)$.



5. Sia data la funzione $f(x) = \begin{cases} e^x - x & per\ x < 0 \\ \cos^2 \pi x & per\ 0 \le x \le 1 \\ 1 + \dfrac{\ln x}{x} & per\ x > 1 \end{cases}$, studiarne la continuità e la derivabilità.

6. Data la funzione definita da : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & per\ -1 \le x < 3 \\ bx + c & per\quad 3 \le x \le 5 \end{cases}$

a) Determinare i valori dei parametri reali a, b, c in modo che la funzione $f(x)$ verifichi le ipotesi del teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 5]$.

b) Determinare l'ascissa del punto previsto dalla tesi del teorema e rappresentare graficamente la funzione ottenuta.

7. Si scriva l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \int_e^{x^2} \frac{\ln t}{t} dt$ nel punto di ascissa $x_0 = \sqrt{e}$.

8. Sia f una funzione continua nell'intervallo $I = [1; 3]$, derivabile nei punti interni ad I e tale che $f(1) = 2$ e $f(3) = 10$.

a. Dimostrare che esiste almeno un punto $x_0 \in]1; 3[$ in cui $f'(x_0) = 4$.
b. Enunciare e dimostrare il teorema utilizzato per la dimostrazione.

9. a) Dare la definizione di **sezione aurea** di un segmento.
b) Se un segmento misura l, quanto misura la sua sezione aurea?
c) Dimostrare che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza ad esso circoscritta.

10. Si consideri la successione $\{a_n\}$ definita per ricorrenza: $a_0 = \frac{1}{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ $(\forall n \in N)$

a) Calcolare a_1, a_2, a_3.
b) Verificare per ricorrenza che la successione è crescente.
c) Verificare che $\frac{1}{2} \le a_n \le 1, \quad \forall n$ e dedurre che la successione ammette limite finito *l*.
d) Calcolare $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$.