LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2°- 40139 BOLOGNA

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**
**A.S. 2007-2008**
SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO

**Tema di:** MATEMATICA

| Nome del Candidato:______________________________________________Classe__________ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Problema n°_____ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ | Quesito n°___ |

***Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.***

## PROBLEMA 1

Data la funzione $y = f(x)$ definita da $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $\quad a \neq 0$,

a) verificare che il suo grafico presenta sempre un punto di flesso che è centro di simmetria per il grafico $\gamma$ della funzione;
b) stabilire sotto quali condizioni $f'(x) = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte $x_1$ ed $x_2$. Sotto tali condizioni, detta $x_F$ l'ascissa del punto di flesso, verificare che $x_F$ è la media aritmetica $x_1$ ed $x_2$;
c) determinare i valori dei parametri per i quali il grafico della funzione ha il punto di flesso nell'origine e il massimo nel punto $(2;8)$. Studiare l'andamento della funzione $y = f(x)$ così ottenuta;
d) dopo avere scritto l'equazione della retta *t*, tangente alla curva nell'origine, considerare una retta passante per O, interna all'angolo acuto formato dalla retta *t* e dall'asse *x*. Determinare la retta che rende massima l'area del triangolo *APB*, dove con *P* si è indicato il punto di intersezione tra la retta e la curva appartenente al primo quadrante, e con *A* e *B* i punti di intersezione della curva con l'asse delle *x* diversi dall'origine;
e) il grafico $\gamma$ della funzione e il grafico della parabola, con asse parallelo all'asse *y*, passante per l'origine e avente vertice $\left(\frac{9}{4}, \frac{81}{16}\right)$, delimitano una regione chiusa del primo quadrante. Quale è il raggio del cerchio ad essa equivalente?

## PROBLEMA 2

Date le funzioni reali a variabile reale

$$f(x) = \log 2x \qquad g(x) = \log|x-2|$$

a) tracciare il grafico delle due funzioni in uno stesso piano cartesiano;
b) determinare le coordinate dei loro punti di intersezione;
c) determinare per quale valore di *x* risulta $f'(x) \cdot g'(x) = -1$ e fornire un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto;
d) calcolare l'area della regione piana delimitata da $f(x)$, dall'asse *x*, dall'asse *y* e dalla retta $y = 1$;
e) calcolare il volume del solido che si genera dalla rotazione della figura considerata in d) attorno all'asse *y*.

*Durata massima della prova: 5 ore.*
*È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.*
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

## QUESTIONARIO

**1.** Fra le funzioni aventi $y''=-\cos x-2\sin(2x)$ individuare quella che nel suo punto $P\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ ha come retta tangente $y=-2x+\pi$.

**2.** Dimostrare che la funzione $f(x)=x^3-x+q$ ammette almeno uno zero $\forall q\in\Re$. Determinare poi per quali valori del parametro $q\in R$ la funzione ammette soltanto uno zero.

**3.** Dare la definizione di integrale indefinito di *f(x)*. È noto che $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+c_1$, e che lo stesso integrale indefinito può essere espresso $\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\arccos x+c_2$. Motivare esaurientemente ed anche graficamente perché le due famiglie di primitive sono equivalenti .

**4.** Data la funzione $f(x)=\begin{cases}|2x-1| & x<\frac{1}{2}\\ b+log_2 x & x\geq\frac{1}{2}\end{cases}$

a) determinare per quale valore del parametro $b\in R$ la funzione $f$ è continua per $x=\frac{1}{2}$. La funzione così ottenuta è derivabile su tutti i punti del suo dominio?

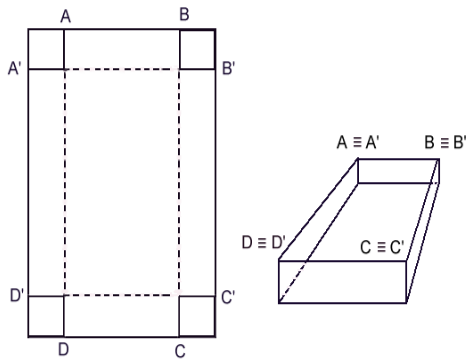
b) per il valore di $b$ determinato nel punto a), individuare punti di minimo e di massimo assoluti della funzione nell'intervallo $[0;4]$.

**5.** Sapendo che $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=5$ e $\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=7$, dire se è possibile calcolare $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$ e, *in caso affermativo*, calcolarlo.

**6**. Un triangolo *ABC* ha l'angolo di vertice *B* doppio dell'angolo di vertice *C* e il lato *AC* misura $b$. Determinare $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ in funzione dell'ampiezza *x* dell'angolo in *C*. Risolvere, nel contesto della situazione proposta, la disequazione $\overline{AB}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}b$.

**7**. La successione $a_n$ ha termine generale $a_n=\frac{2^n-3}{2}$. Verificare che si tratta di una successione crescente e divergente, e determinare il più piccolo valore di n per il quale risulta $a_n\geq 10^4$.

**8.** Si vuole costruire una scatola asportando dagli angoli di un cartone rettangolare, di dimensioni $a$ e $6a$, quattro quadrati uguali e piegando i lembi ottenuti come mostrato in figura. Determinare il lato *l* dei quadrati affinché la scatola ottenuta abbia volume massimo.




**9.** Risolvere la seguente disequazione $\binom{x}{x-3}>\frac{10}{3}\binom{x}{5}$

**10.** Quale fra le seguenti espressioni è priva di significato in **R**?

$a)$ $\sin\ln e^{-2\pi}$ $b)$ $\log\cos(-4\pi)$ $c)$ $\log_{\sqrt{1-x^2}}(x-1)$ $d)$ $\sqrt{-\log_{\frac{1}{2}}8}$

Dare una esauriente spiegazione della risposta.

■