



LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2°- 40139 BOLOGNA

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

A.S. 2006-2007

SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA

CORSO SPERIMENTALE PNI - Piano Nazionale dell'Informatica

Tema di: MATEMATICA

| | | | | | |
|---------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Nome del Candidato: _____ | | | | | Classe _____ |
| Problema n° _____ | Quesito n° _____ | Quesito n° _____ | Quesito n° _____ | Quesito n° _____ | Quesito n° _____ |

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

E' assegnata la funzione definita da $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

- studiare il grafico;
- sia x un numero reale non nullo. Si indichi con M il punto di ascissa x sulla curva C che rappresenta il grafico della funzione f e P il punto di uguale ascissa sulla retta di equazione $y = x - 2$. Calcolare $\phi(x) = \overline{MP}$. Determinare i limiti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x)$, interpretando geometricamente i risultati ottenuti;
- determinare l'area della regione finita di piano definita dalla condizione $1 \leq x \leq 3 \wedge x - 2 \leq y \leq f(x)$;
- sia $g(x)$ la funzione definita da
$$\begin{cases} g'(x) = f(x) \\ g(1) = -\frac{3}{2} \end{cases}$$
 : determinare l'espressione analitica di $g(x)$ e tracciarne il grafico;
- dallo studio di $g(x)$ dedurre che l'equazione $g(x) = 0$ ha una e una sola soluzione α compresa fra 3 e 4, e stabilire una approssimazione di α con una cifra decimale esatta;
- successivamente, si scriva un programma, codificato in un linguaggio di programmazione a scelta, che calcoli α con una approssimazione di 10^{-n} con n prefissato.

PROBLEMA 2

Sulla circonferenza di diametro $AB = 2 \cdot r$ si consideri un punto P ; sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB .

- Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ del volume V del solido generato dal trapezio $APMB$ in una rotazione completa intorno a BM .
- Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ' del volume V' del solido generato dal trapezio $APMB$ in una rotazione completa intorno ad AB .
- Dimostrare che Γ è maggiore di Γ' .

Durata massima della prova: 5 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. In un piano cartesiano riferito ad un sistema di assi ortogonali Oxy , tracciare un possibile grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) Dominio: $R - \{7\}$; b) $f(-6) = f(-3) = f(3) = f(12) = 0$;

c) $f(x) > 0$ per $x < -6 \vee -3 < x < 3 \vee x > 12$; d) $f'(-9) = f'\left(-\frac{9}{2}\right) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = -\infty$; f) $f''(-10) = f''(-6) = f''(1) = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -6^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -6^-} f'(x) = -\infty$;

h) massimo relativo nel punto $(0; 4)$.

2. Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin(t^3) dt}{x^4}$.

3. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le affinità di equazioni: $\begin{cases} X = kx + 2y - k \\ Y = -x - y + k \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di k .

4. La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla funzione: $C(t) = \frac{5t}{1 + \left(\frac{t}{k}\right)^2}$, nella quale $k > 0$ è un parametro dipendente da condizioni fisiche.

Determinare il valore di k , se la massima concentrazione viene raggiunta dopo $t = 6$ ore.

5. Le coordinate di un punto mobile P in un piano cartesiano riferito ad un sistema di assi

ortogonali Oxy sono date in funzione del tempo t da: $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t} + 2t \end{cases}$:

a) dimostrare che la traiettoria di P è la curva γ , dove γ è il grafico della funzione

$$y = x - 2 \cdot \ln x.$$

b) in corrispondenza di quale istante t , il punto P coincide con $A(1; 1)$? Stabilire gli intervalli sui quali la funzione è invertibile e detta $g = f^{-1}(y)$ la funzione inversa, calcola $g'(e - 2)$.

6. Provare che l'equazione $x \cdot 3^x = 1$ ammette una sola soluzione reale, e che essa è compresa fra 0 e 1. Avvalendosi di un metodo numerico, si calcoli una approssimazione di tale soluzione.

7. Considerato un triangolo ABC , acutangolo e isoscele sulla base BC , si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC , il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC .

Dimostrare che EC è perpendicolare a CB ; i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili.

8. L'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ nel piano cartesiano determina:

- a) due rami di iperbole.
- b) l'unione di un ramo di iperbole con un arco di circonferenza.
- c) due punti soltanto.
- d) l'insieme vuoto.
- e) quattro punti soltanto.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.

Rispondere dando adeguata motivazione.

9. Discutere il sistema parametrico
$$\begin{cases} x - \lambda y - z = \lambda - 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + z = 0 \\ -\lambda x + y + \lambda z = 1 - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$
 alla luce del Teorema di

Rouché – Capelli.

10. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

■