M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

A.S. 2006-2007

SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA

CORSO SPERIMENTALE PNI - Piano Nazionale dell'Informatica

Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____Classe______					
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

E' assegnata la funzione definita da $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

a) studiarne il grafico;
b) sia x un numero reale non nullo. Si indichi con M il punto di ascissa x sulla curva C che rappresenta il grafico della funzione f e P il punto di uguale ascissa sulla retta di equazione $y = x - 2$. Calcolare $\phi(x) = \left|\overline{MP}\right|$. Determinare i limiti $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} \phi(x)$, interpretando geometricamente i risultati ottenuti;
c) determinare l'area della regione finita di piano definita dalla condizione $1 \le x \le 3 \wedge x - 2 \le y \le f(x)$;
d) sia g(x) la funzione definita da $\begin{cases} g'(x) = f(x) \\ g(1) = -\frac{3}{2} \end{cases}$: determinare l'espressione analitica di g(x) e tracciarne il grafico;
e) dallo studio di $g(x)$ dedurre che l'equazione $g(x) = 0$ ha una e una sola soluzione α compresa fra 3 e 4, e stabilire una approssimazione di α con una cifra decimale esatta;
f) successivamente, si scriva un programma, codificato in un linguaggio di programmazione a scelta, che calcoli α con una approssimazione di 10^{-n} con n prefissato.

PROBLEMA 2

Sulla circonferenza di diametro $AB = 2\cdot r$ si consideri un punto P; sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

a) Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ del volume V del solido generato dal trapezio $APMB$ in una rotazione completa intorno a BM.

b) Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ' del volume V' del solido generato dal trapezio $APMB$ in una rotazione completa intorno ad AB.

c) Dimostrare che Γ è maggiore di Γ'.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. In un piano cartesiano riferito ad un sistema di assi ortogonali *Oxy*, tracciare un possibile grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) Dominio: $R - \{7\}$;

b) $f(-6) = f(-3) = f(3) = f(12) = 0$;

c) $f(x) > 0$ per $x < -6 \vee -3 < x < 3 \vee x > 12$;

d) $f^{I}(-9) = f^{I}\left(-\frac{9}{2}\right) = 0$

e) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^{+}$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 7} f(x) = -\infty$;

f) $f^{II}(-10) = f^{II}(-6) = f^{II}(1) = 0$

g) $\lim_{x \to 0^{-}} f^{I}(x) = +\infty$; $\lim_{x \to 0^{+}} f^{I}(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -6^{+}} f^{I}(x) = \lim_{x \to -6^{-}} f^{I}(x) = -\infty$;

h) massimo relativo nel punto $(0; 4)$.

2. Calcolare il limite $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x sin(t^3)dt}{x^4}$.

3. In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le affinità di equazioni: $\begin{cases} X = kx + 2y - k \\ Y = -x - y + k \end{cases}$, dove k è un parametro reale. Trovare il luogo geometrico dei punti uniti dell'affinità al variare di *k*.

4. La concentrazione C di un antibiotico nel sangue dopo un tempo t dall'assunzione è data dalla funzione: $C(t) = \frac{5t}{1 + \left(\frac{t}{k}\right)^2}$, nella quale $k > 0$ è un parametro dipendente da condizioni fisiche.

Determinare il valore di *k*, se la massima concentrazione viene raggiunta dopo $t = 6$ ore.

5. Le coordinate di un punto mobile *P* in un piano cartesiano riferito ad un sistema di assi ortogonali *Oxy* sono date in funzione del tempo *t* da: $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-t} + 2t \end{cases}$:

a) dimostrare che la traiettoria di *P* è la curva γ, dove γ è il grafico della funzione

$$y = x - 2 \cdot \ln x .$$

b) in corrispondenza di quale istante *t*, il punto *P* coincide con $A(1; 1)$? Stabilire gli intervalli sui quali la funzione è invertibile e detta $g = f^{-1}(y)$ la funzione inversa, calcola $g'(e-2)$.

6. Provare che l'equazione $x \cdot 3^x = 1$ ammette una sola soluzione reale, e che essa è compresa fra 0 e 1. Avvalendosi di un metodo numerico, si calcoli una approssimazione di tale soluzione.

7. Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e si costruisca, dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*, il punto *E* in modo che il triangolo *ECD* sia simile ad *ABC*.
Dimostrare che *EC* è perpendicolare a *CB*; i triangoli *EFC* e *AFD* – dove *F* è il punto comune ai segmenti *ED* e *AC* – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli *EFA* e *CFD* sono simili.

8. L'equazione $|x^2 - 1| + |4 - y^2| = 0$ nel piano cartesiano determina:

a) due rami di iperbole.

b) l'unione di un ramo di iperbole con un arco di circonferenza.

c) due punti soltanto.

d) l'insieme vuoto.

e) quattro punti soltanto.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondere dando adeguata motivazione.

9. Discutere il sistema parametrico $\begin{cases} x - \lambda y - z = \lambda - 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + z = 0 \\ -\lambda x + y + \lambda z = 1 - \lambda \end{cases}$, $\lambda \in R$, alla luce del Teorema di Rouché – Capelli.

10. Un'urna contiene delle palline che possono essere bianche o nere, di vetro o di plastica. Precisamente: 135 sono bianche, 115 di vetro; inoltre 45 palline di vetro sono bianche e 80 palline di plastica sono nere. Si estrae a caso una pallina: qual è la probabilità che sia nera e di vetro?

■