LICEO SCIENTIFICO STATALE
"ENRICO FERMI"
VIA MAZZINI n.172/2°- 40139 BOLOGNA

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
A.S. 2006-2007

SIMULAZIONE DELLA SECONDA PROVA SCRITTA
CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Nome del Candidato:____Classe__________					
Problema n°_____	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___	Quesito n°___

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerare la funzione $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$.

a) Studiare l'andamento di $y = f(x)$ e tracciarne il grafico.
b) Analizzare i punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile.
c) Dopo aver enunciato il teorema di *Lagrange* per le funzioni reali di una variabile reale, provare che nell'intervallo $[0;1]$ vale il suddetto teorema e calcolare l'ascissa del punto di contatto tra la curva e la tangente di cui tratta il teorema.
d) Calcolare l'integrale definito $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ e spiegare perché esso non rappresenta la misura dell'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le rette $x = -1$ e $x = 1$.
e) Calcolare infine la misura dell'area della regione di piano descritta al punto d).

PROBLEMA 2

Date le coniche γ di equazione: $x^2 + y^2 = 4$ e γ' di equazione : $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

a) Tracciare i rispettivi grafici in un piano cartesiano Oxy.
b) Considerato il fascio di rette $y = t$, t parametro reale positivo, indicare con A e B le intersezioni di una generica retta del fascio con gli archi di γ e di γ' appartenenti al primo quadrante.
c) Operando una rotazione completa attorno all'asse delle y, il triangolo, avente un lato coincidente con AB e il vertice opposto nell'origine O del piano cartesiano, genera un solido di volume V. Esprimere V in funzione di t e studiare la funzione $y = V(t)$, con $t \in R$, così ottenuta e rappresentarne il grafico λ in un piano cartesiano Oty.
d) Nell'intervallo $[0;1]$ si consideri il grafico di λ. Inscrivere nella regione di piano compresa fra il suddetto grafico, la retta $t = 1$ e l'asse delle t il rettangolo di perimetro massimo.
e) Calcolare l'area della parte di piano (finita) delimitata dalla curva λ e dall'asse t.

Durata massima della prova: 5 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'aula prima che siano trascorse 2 ore dalla consegna del tema.

QUESTIONARIO

1. In un piano cartesiano *Oxy*, tracciare un possibile grafico di una funzione $y = f(x)$ che soddisfi alle seguenti condizioni:

a) dominio: $R - \{7\}$;

b) $f(-6) = f(-3) = f(3) = f(12) = 0$;

c) $f(x) > 0$ per $x < -6 \vee -3 < x < 3 \vee x > 12$;

d) $f'(-9) = f'\left(-\dfrac{9}{2}\right) = 0$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = -\infty$;

f) $f''(-10) = f''(-6) = f''(1) = 0$

g) $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -6^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to -6^-} f'(x) = -\infty$;

h) massimo relativo nel punto $(0; 4)$.

2. Calcolare il limite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x \sin(t^3)\,dt}{x^4}$.

3. Ad un cilindro equilatero, avente raggio di base unitario, si circoscriva il cono circolare retto, con base complanare a quella del cilindro, il cui volume è minimo.

4. Per quali valori di *k* il grafico di

$$y = \frac{7x - 13}{x^2 - 2(k-1)x + 2k}$$

presenta due asintoti paralleli all'asse *y*? Esiste un valore di *k* per il quale tali asintoti distano $\dfrac{1}{2}$?

5. La funzione definita da $q = e^{2t}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ descrive il passaggio di una carica elettrica q nella sezione di un conduttore al variare del tempo *t*. Considerare la funzione data nell'intervallo $]0; \pi[$ e determinare l'intensità di corrente *i* massima in tale intervallo.

6. Sia $F(x) = \int_0^x |t - 1|\,dt$. Calcolare $F(2)$. La funzione $F(x)$ è continua su $[0; 2]$? E' derivabile su $]0; 2[$?

7. Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e si costruisca, dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*, il punto *E* in modo che il triangolo *ECD* sia simile ad *ABC*.
Dimostrare che *EC* è perpendicolare a *CB*; i triangoli *EFC* e *AFD* – dove *F* è il punto comune ai segmenti *ED* e *AC* – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli *EFA* e *CFD* sono simili.

8. Enunciare il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili e fornirne una dimostrazione. Successivamente, studiare la continuità e la derivabilità della funzione

$$f(x) = \frac{|x+5|}{x-1}$$

e scrivere le equazioni delle rette tangenti alla curva grafico della funzione data negli eventuali punti angolosi.

9. Data la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+a} & x \le 0 \\ \dfrac{bx-1}{2x-1} & x > 0 \end{cases},$$

determinare a e b in modo che $f(x)$ sia continua e derivabile in $x = 0$ e poi rappresentarla graficamente. Quindi, individuare (se esiste) un intervallo limitato e chiuso per il quale valga il Teorema di Rolle.

10. È data la seguente successione definita per ricorrenza: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 3n - 1, \quad n \in N.$

a) Dimostra che la successione è crescente.

b) Dimostra che $\forall n > 3, \quad a_n \ge n^2$.

■