I temi della simulazione della prova di Matematica (A.S. 2006/2007): un primo commento a cura del Prof. Fabrizio Monari.

1. Il tema per i corsi PNI

PROBLEMA 1

E' assegnata la funzione definita da $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$.

- *a) studiarne il grafico;*
- *b) sia x un numero reale non nullo. Si indichi con M il punto di ascissa x sulla curva C che rappresenta il grafico della funzione f e P il punto di uguale ascissa sulla retta di equazione* $y = x - 2$. *Calcolare* $\phi(x) = \left|\overline{MP}\right|$. *Determinare i limiti* $\lim_{x \to +\infty} \phi(x)$ *e* $\lim_{x \to -\infty} \phi(x)$, *interpretando geometricamente i risultati ottenuti;*
- *c) determinare l'area della regione finita di piano definita dalla condizione* $1 \le x \le 3 \wedge x - 2 \le y \le f(x)$;
- *d) sia g(x) la funzione definita da* $\begin{cases} g'(x) = f(x) \\ g(1) = -\frac{3}{2} \end{cases}$ *: determinare l'espressione analitica di g(x) e tracciarne il grafico;*
- *e) dallo studio di g(x) dedurre che l'equazione* $g(x) = 0$ *ha una e una sola soluzione* α *compresa fra 3 e 4, e stabilire una approssimazione di* α *con una cifra decimale esatta;*
- *f) successivamente, si scriva un programma, codificato in un linguaggio di programmazione a scelta, che calcoli* α *con una approssimazione di* 10^{-n} *con n prefissato.*

I tratta di un testo abbastanza lineare, che presenta caratteristiche standard. Vediamo i vari punti.

a) Si tratta di una ordinaria iperbole, non equilatera, di asintoti $x = 0$ ed $y = x - 2$. La “semplicità” della funzione si intuiva pensando $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ in termini di $xy - x^2 + 2x - 1 = 0$: è una equazione del tipo $p(x, y) = 0$, con $p(x, y)$ polinomio di secondo grado. Il grafico presenta un massimo in $(-1;\ 4)$ e un minimo in $(1; 0)$. Non presenta flessi.

b) Questo quesito accompagna lo studente verso il riconoscimento della retta di equazione $y = x - 2$ come asintoto della funzione. I limiti richiesti esistono, sono finiti e valgono 0.

c) Si tratta di eseguire un ordinario integrale definito (si ottiene $\ln 3$).

d) La funzione richiesta è $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x|$ (attenzione al valore assoluto!). Il grafico è piuttosto interessante: presenta un asintoto verticale (x=0) e un flesso a tangente orizzontale per x=1.
La funzione e' decrescente in $]-\infty; 0[$ e crescente in $]0; +\infty[$, ed è priva di massimi e minimi.

e) Essendo continua su $]-\infty; 0[$ e su $]0; +\infty[$, e considerato che

$$g(3) = -\frac{3}{2} + \ln 3$$

è un numero negativo, mentre

$$g(4) = 2\ln 2$$

è un numero positivo, si può applicare, nell'intervallo $[3,4]$, un noto teorema.

f) Il programma citato è presente in molti testi, e la sua struttura potrebbe essere di questo tipo:

```
program corde;
uses crt;
var a,b,y:real;

function f(x:real):real;
begin
f:=exp(x)+x-4;
end;

function zerocorda(p,q:real):real;
begin
zerocorda:=(f(p)*q-f(q)*p)/(f(p)-f(q));
(*dalle cordinate dei due punti ottengo lo zero della corda che li unisce:vedi allegato word*)
end;

procedure ricors;
begin
  writeln('Intervallo tra ',a:2:15,' e ',b:2:15);
  writeln('L''equazione della corda che unisce i punti con queste ascisse è approssimativamente: y=
  ',((f(b)-f(a))/(b-a)):3:6,'x + (',(-((f(b)-f(a))/(b-a))*a+f(a)):3:6,')');
   writeln;
   readln;
   y:=f(zerocorda(a,b));
   (*studio la y della funzione f corrispondente allo zero della corda*)
   if abs(y)<=0.0001 then
   writeln('Lo zero della funzione è circa ',zerocorda(a,b):2:15);
   if y<-0.0001 then
         begin
             a:=zerocorda(a,b);
             ricors;
         end;
    if y>0.0001 then
         begin
            b:=zerocorda(a,b);
         ricors;
     end;
 end;

begin
clrscr;
a:=1;
b:=2;
ricors;
readln;
end.
```

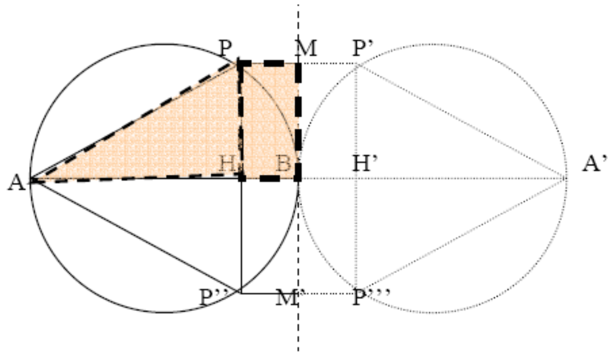
PROBLEMA 2

Sulla circonferenza di diametro AB = 2·r si consideri un punto P; sia M la proiezione di P sulla retta perpendicolare in B ad AB.

a) *Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ del volume V del solido generato dal trapezio APMB in una rotazione completa intorno a BM.*

b) *Determinare per quale posizione di P sulla circonferenza è massima la misura Γ' del volume V' del solido generato dal trapezio APMB in una rotazione completa intorno ad AB.*

c) *Dimostrare che Γ è maggiore di Γ'.*



Il secondo problema appariva (almeno dal punto di vista testuale) più compatto. In realtà, nascondeva alcune insidie. Si poteva, in primo luogo, adottare come incognita sia un angolo che un segmento: ci metteremo nella prima ipotesi. Quindi $PAB = x$: le limitazioni sono ovvie (ma essenziali, come in tutti i problemi di massimo e di minimo).

Ora, ricavare

$$\overline{AP} = 2r\cos x \qquad \overline{PH} = 2r\cos x\sin x \qquad \overline{AH} = 2r\cos^2 x \qquad \overline{HB} = 2r\sin^2 x$$

è piuttosto semplice. Tuttavia, se usiamo queste scritture, l'apparato algebrico diventa davvero pesante e difficilmente gestibile. Trattandosi di una simulazione, si è voluto "avvertire" dell'opportunità di riflettere bene, prima di avviare i trattamenti algebrici. In effetti, riscriviamo le formule precedenti utilizzando in maniera opportuna le formule di duplicazione

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1+\cos(2x) \\ 2\sin^2 x &= 1-\cos(2x) \\ 2\sin x\cos x &= \sin(2x) \end{aligned}$$

(le prime due derivano da $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$): si ha una sorta di "abbassamento di grado", in virtù del quale il volume richiesto prende la forma:

$$V = \pi(r\sin(2x))^2(r(1-\cos(2x))) + \frac{1}{3}\pi(r\sin(2x))^2(r(1+\cos(2x)))$$

che, con un po' di pazienza (raccoglimenti, soprattutto!!) , diventa

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \sin^2(2x)\cdot(2-\cos(2x))$$

Da qui in avanti, lo studio del massimo e del minimo della funzione non riserva difficoltà. Il volume dell'altro solido citato nel problema si calcola nello stesso modo. Per il terzo quesito, è bene ricordare ancora le formula di duplicazione. Serviranno.

I quesiti per i corsi PNI

Q1) Si tratta di costruire il grafico di una funzione in base ad un insieme di condizioni assegnate: il risultato è un oggetto orribile, dotato di un asintoto orizzontale, un asintoto verticale, quattro zeri e, udite udite, un flesso a tangente verticale (andiamo a fare un ripassino? cosa accade alla derivata prima?), un punto di massimo in cui la funzione non risulta derivabile.

Q2) Applicando De l'Hôpital, si ha immediatamente il limite richiesto (1/4). Bisogna tuttavia conoscere un teorema importante riguardo a funzioni del tipo $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Q3) In primo luogo, affinché si possa parlare di affinità, occorre che k sia diverso da 2. Dopo aver ricavato

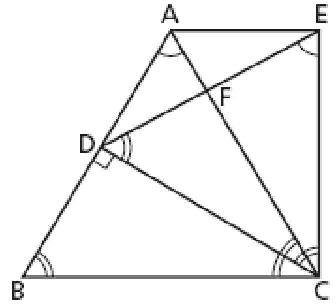
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{k}{2} \end{cases}$$

occorre interpretare bene tale risultato. Non è possibile ricavare k in una equazione e sostituirla nell'altra. Facendo variare k (anche sostituendo alcuni valori numerici) si riconosce come il sistema precedente descriva i punti di una retta (quale?). Il luogo richiesto è dunque una retta, privata di un punto.

Q4) Derivando la funzione rispetto a t, ed imponendo che per $t = 6$ la derivata prima sia nulla, si ha $k = 6$ (si tenga presente che il testo cita esplicitamente k positivo). Si tratta solo di applicare bene le regole di derivazione.

Q5) Si può utilizzare la prima equazione per ricavare $t = -\ln x$. In corrispondenza di quale istante t il punto P coincide con A(1; 1)? $\begin{cases} e^{-t} = 1 \\ e^{-t} + 2t = 1 \end{cases}$ solo per $t = 0$. Gli intervalli in cui essa risulta invertibile sono $]0; 2[$ e $]2; +\infty[$. Detta g la funzione inversa, si ha $g'(e-2) = \dfrac{1}{f'(e)}$.

Q6) L'equazione può anche essere interpretata in termini di $\begin{cases} y = 3^x \\ y = \dfrac{1}{x} \end{cases}$, di notevole evidenza grafica. Altrimenti, si può ragionare sulla funzione $y = x \cdot 3^x - 1$, far vedere che è continua nell'intervallo richiesto, e che le condizioni per l'applicazione del noto teorema sono verificate. Si può quindi applicare bisezione, o uno qualsiasi dei metodi studiati.



Q7) Si inizia osservando (*vedi figura accanto*) che DBC e BCD sono complementari. Per la similitudine richiesta, anche DCE è complementare di DBC.

Q8) Sono i quattro punti che si ottengono risolvendo il sistema $\begin{cases} x^2-1=0 \\ y^2-4=0 \end{cases}$.

L'equazione $|f(x)|+|g(x)|=0$ equivale a $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=0 \end{cases}$.

Q9) Il determinante della matrice completa si annulla per $k=1 \vee k=-1$. Per tutti i valori di k diversi dai due segnalati, il sistema è di Cramer e quindi ha una sola soluzione, da calcolare con un po' di pazienza. Per k = 1, esso diventa $\begin{cases} x-y-z=1 \\ 2x+2y+z=0 \\ -x+y+z=0 \end{cases}$: alla luce del Teorema di Rouché Capelli, esso ha infinite soluzioni della forma $\left(\frac{z}{4}; -\frac{3}{4}z; z\right)$.

Per $k=-1$, esso diventa $\begin{cases} x+y-z=-2 \\ 2x+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases}$: tale sistema è privo di soluzioni.

Q10) Le palline bianche, in tutto, sono 135: visto che 45 sono di vetro, 90 saranno di plastica. Fra le 115 palline di vetro, solo 70 saranno nere: il totale delle palline nere è quindi di 150. Si tratta ora di applicare lo schema della probabilità composta $P(N \cap V)=P(N)\cdot P(V/N)$. Da notare la $P(V/N)$: la probabilità di estrarre una pallina di vetro non è infatti indipendente dal fatto che essa sia bianca o nera.