I temi della simulazione della prova di Matematica (A.S. 2006/2007): un primo commento a cura del Prof. Fabrizio Monari.

1. Il tema per i corsi di ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Considerare la funzione $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$.

a) *Studiare l'andamento di* $y = f(x)$ *e tracciarne il grafico.*

b) *Analizzare i punti in cui la funzione è continua, ma non derivabile.*

c) *Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, provare che nell'intervallo* $[0;1]$ *vale il suddetto teorema e calcolare l'ascissa del punto di contatto tra la curva e la tangente di cui tratta il teorema.*

d) *Calcolare l'integrale definito* $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ *e spiegare perché esso non rappresenta la misura dell'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le rette* $x = -1$ e $x = 1$.

e) *Calcolare infine la misura dell'area della regione di piano descritta al punto d).*

Il testo presenta l'inquietante $|x|$, e la radice $\sqrt[3]{x}$: occorre aver ben presente che quest'ultima è definita per ogni valore reale di *x*. Si può leggere la funzione come $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} & x < 0 \end{cases}$.

a) La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, ha due zeri di ascissa 0 e -1. E' positiva per $x < -1 \vee x > 0$, negativa per $-1 < x < 0$. Non ha asintoti obliqui (il limite $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ è finito, ma…). Ha un minimo relativo (e assoluto) per $x = -\frac{\sqrt{3}}{9}$.

b) Nell'origine non è derivabile: *f'(x)* non è infatti definita per *x* = 0. Studiando i limiti della derivata prima, si conclude che per *x* = 0 il grafico ha un flesso a tangente inflessionale verticale.

c) In $[0;1]$ la funzione è continua, ed in $]0;1[$ è derivabile. La determinazione del punto di ascissa c tale che $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$ conduce a $c = \frac{1}{\sqrt{27}}$.

d) L'integrale in questione non rappresenta l'area descritta: la funzione infatti, nell'intervallo $[-1;1]$, ha segni discordi a seconda che *x*<0 oppure *x*>0.

e) L'area richiesta si ottiene calcolando

$$A = \int_{-1}^{0} |f(x)|dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$

e vale 3/2.

PROBLEMA 2

Date le coniche γ di equazione: $x^2 + y^2 = 4$ *e γ' di equazione :* $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$

a) Tracciare i rispettivi grafici in un piano cartesiano Oxy.

b) Considerato il fascio di rette $y = t$ *, t parametro reale positivo, indicare con A e B le intersezioni di una generica retta del fascio con gli archi di γ e di γ' appartenenti al primo quadrante.*

c) Operando una rotazione completa attorno all'asse delle y, il triangolo, avente un lato coincidente con AB e il vertice opposto nell'origine O del piano cartesiano, genera un solido di volume V. Esprimere V in funzione di t e studiare la funzione $y = V(t)$ *, con* $t \in R$ *, così ottenuta e rappresentarne il grafico λ in un piano cartesiano Oty.*

d) Nell'intervallo $[0,1]$ *si consideri il grafico di λ. Inscrivere nella regione di piano compresa fra il suddetto grafico, la retta* $t = 1$ *e l'asse delle t il rettangolo di perimetro massimo.*

e) Calcolare l'area della parte di piano (finita) delimitata dalla curva λ e dall'asse t.

a) Il secondo problema era centrato sulle coniche. La circonferenza ha centro nell'origine e raggio 2. La parabola ha l'asse y come asse di simmetria: il vertice ha ordinata 1. Essa interseca l'asse x nei due punti $(2,0)$ e $(-2,0)$.

b) Per ottenere i punti A e B è necessario porre le limitazioni $0 \le t \le 1$. Risolvendo due semplici sistemi si ha

$$A(\sqrt{4-t^2}, t) \qquad B(2 \cdot \sqrt{1-t}, t)$$

c) Indichiamo con H il punto di coordinate (0,t). Il solido citato si ottiene per differenza fra

* il cono di altezza $\overline{OH} = t$ e base $\overline{HA} = \sqrt{4-t^2}$

* il cono di altezza $\overline{OH} = t$ e base $\overline{HB} = 2 \cdot \sqrt{1-t}$

Si ottiene la funzione (polinomiale)

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(-t^3 + 4t^2\right)$$

da studiare per $t \in R$. Si tratta di una ordinaria cubica, dotata di due zeri: uno di essi è doppio (fatto che deve dar luogo alle opportune considerazioni). La funzione è positiva per tutti i *t* tali che $t < 4 \wedge t \ne 0$. Il grafico non presenta asintoti (come accade per tutte le funzioni polinomiali), ha un minimo relativo di ascissa 0 e un massimo relativo di ascissa 8/3. Il flesso ha ascissa 4/3.

d) Si tratta di un problema di massimo. Indicando il generico punto di λ con $P\left(t, \frac{\pi}{3}\left(-t^3 + 4t^2\right)\right)$,

il perimetro del rettangolo è espresso da

$$p = 2 \cdot (1-t) + \frac{2}{3}\pi \cdot \left(-t^3 + 4t^2\right) \ . \ \ 0 \le t \le 1$$

Esiste un solo punto, interno all'intervallo $\left[0;1\right]$, in cui la derivata prima si annulla: l'ascissa di tale punto è

$$x = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{16\pi^2 - 9\pi}}{3\pi}$$

ma in tale punto il perimetro è minimo. Il massimo della funzione, continua e definita su un intervallo chiuso e limitato, è quindi da ricercare agli estremi dell'intervallo. Si riconosce così che il massimo è in corrispondenza di $x = 1$.

E' bene osservare che, per $x = 1$, il rettangolo degenera: si può tuttavia ritenere che il problema continui ad avere senso (due lati del rettangolo hanno misura nulla).

e) Si tratta di calcolare un integrale definito. Tale integrale vale $\frac{64}{9}\pi$.

I quesiti per i corsi di ORDINAMENTO

Q1) Si tratta di costruire il grafico di una funzione in base ad un insieme di condizioni assegnate: il risultato è un oggetto orribile, dotato di un asintoto orizzontale, un asintoto verticale, quattro zeri e, udite udite, un flesso a tangente verticale (andiamo a fare un ripassino? cosa accade alla derivata prima?), nonché un punto di massimo, in cui fra l'altro la funzione non risulta derivabile.

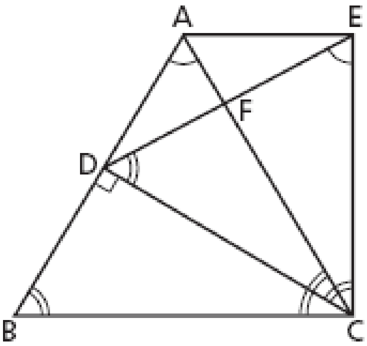
Q2) E' necessario sapere che la funzione $F(x) = \int_0^x \sin^3 t\,dt$ è derivabile. Applicando De l'Hôpital, si ha immediatamente il limite richiesto (viene 1/4).

Q3) Si tratta di un problema di minimo. Indicando con x la semiapertura del cono, si hanno le ovvie limitazioni $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (gli estremi non sono compresi). Il raggio di base del cono viene espresso da $2tgx + 1$, mentre la sua altezza è data da $2 + \frac{1}{tgx}$.

Q4) Si chiede per quali valori di k il grafico di $y = \frac{7x - 13}{x^2 - 2(k-1)x + 2k}$ presenta due asintoti paralleli all'asse y: è necessario che risulti $\Delta > 0$ per il polinomio che figura a denominatore. Ciò accade per $k < 2 - \sqrt{3} \vee k > 2 + \sqrt{3}$. Gli asintoti distano 1/2 se solo se la differenza fra $x_1 = k - 1 - \sqrt{k^2 - 4k + 1}$ e $x_2 = k - 1 + \sqrt{k^2 - 4k + 1}$ è (in valore assoluto) tale che $\left|\left(k - 1 + \sqrt{k^2 - 4k + 1}\right) - \left(k - 1 - \sqrt{k^2 - 4k + 1}\right)\right| = \frac{1}{2}$. Esistono dunque due valori di k che soddisfano alla richiesta del quesito.

Q5) L'intensità di corrente è collegata alla funzione $q = q(t)$ da una relazione ben nota. Derivando si ottiene $i = 2\,e^t \cdot \left(\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\right)$. Il massimo di i si ha studiando $\frac{di}{dt}$, e si ottiene per $t = \frac{\pi}{4}$. Ricordando che $\cos(-x) = \cos x$ (la funzione coseno è pari…) il quesito risultava di più semplice trattazione.

Q6) La funzione definita da $F(x)$ può essere descritta così: $F(x) = \begin{cases} \int_0^x (1-x)dx \\ \frac{1}{2} + \int_1^x (x-1)dx \end{cases}$ a seconda che $x \in [0;1[$ oppure che $x \in]1;2]$. Naturalmente, $F(1) = \frac{1}{2}$. La funzione definita da $F(x)$ è continua su $[0;2]$ e derivabile su $]0;2[$. Nel punto di ascissa 1, essendo $F(x)$ continua, si può valutare la sua derivabilità mediante lo studio di $\lim_{x\to 1^-} F'(x)$ e di $\lim_{x\to 1^{+-}} F'(x)$.



Q7) Si tratta di osservare (*vedi figura accanto*), preliminarmente, che DBC e BCD sono complementari. Per la similitudine richiesta, anche DCE è complementare di DBC.

Q8) La funzione è definita per $x \neq 1$. L'enunciato del teorema citato è su ogni testo. La funzione assegnata è continua su $]-\infty,1]$ ed è continua su $[1,+\infty[$. La retta $x = 1$ è un asintoto verticale. Il grafico della funzione è dotato di un solo zero, in corrispondenza di $x = -5$. Per tale valore di x la funzione è continua ma non derivabile, essendo $\lim_{x\to -5^-} f'(x) \neq \lim_{x\to -5^+} f'(x)$.

Q9) Affinché la funzione $f(x) = \begin{cases} e^{x+a} & x \leq 0 \\ \frac{bx-1}{2x-1} & x > 0 \end{cases}$ sia continua e derivabile in $x = 0$, è necessario che $\begin{cases} e^a = 1 \\ e^a = 2-b \end{cases}$ quindi $a = 0$ e $b = 1$. Non esiste alcun intervallo in cui possa valere il teorema di Rolle: la funzione è crescente per $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ e per $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Q10) Si tratta di un quesito abbastanza originale e non di routine. La successione è crescente in quanto $a_{n+1} - a_n = 3n - 1$ e $3n - 1 > 0$ (ricordiamo l'appartenenza di n all'insieme $\mathbb{N}$). Determiniamo i primi elementi della successione

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	8	16	27

La dimostrazione successiva può avvenire per induzione. Accertato che $a_1 \geq 1^2$, supponendo vera $a_n \geq n^2$ per $n > 3$ si ha

$$a_{n+1} = a_n + 3n - 1 \geq n^2 + 3n - 1 \geq n^2 + 2n + 1 + n - 2 \geq (n+1)^2.$$