ALMA MATER STUDIORUM UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI BOLOGNA

SCUOLA DI SPECIALIZZAZIONE PER L'INSEGNAMENTO SECONDARIO

INDIRIZZO FISICO – INFORMATICO – MATEMATICO
CLASSE DI ABILITAZIONE A047
SEDE DI BOLOGNA

Direttore della Scuola: Prof. Roberto Greci
Direttore Sezione di Bologna: Prof. Antonio Genovese

UN ESPERIMENTO DI INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA IN UNA CLASSE PRIMA DI UN LICEO SCIENTIFICO: FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI E FRAZIONI ALGEBRICHE

TESI DI SPECIALIZZAZIONE

Specializzando:
Dott.ssa EMANUELA PIERANDI

Supervisore:
Prof. FABRIZIO MONARI

Relatore:
Chiar.mo Prof. LIBERO VERARDI

Anno accademico 2006/2007

A mio marito Michele,
a mia figlia Anna
e al bimbo in arrivo
per aver contribuito,
più o meno consapevolmente,
al raggiungimento di questo mio traguardo.

INDICE GENERALE

PREMESSA

Il presente lavoro rappresenta il risultato conclusivo della mia esperienza di formazione presso la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario Superiore dell'Università di Bologna.

Si tratta di una riflessione su un esperimento di insegnamento-apprendimento della matematica, alla luce delle chiavi interpretative suggerite dalla Didattica della Matematica, nonché delle nozioni apprese durante tutto l'iter formativo della Scuola. Tale esperimento, condotto nell'ambito dell'attività di tirocinio, ha avuto luogo presso un classe prima del Liceo Scientifico E. Fermi di Bologna, sotto la preziosa supervisione del professor Fabrizio Monari e la guida attenta e costante della professoressa Lucia Batacchi, cui sono stata temporaneamente affiancata.

Il lavoro si sviluppa in tre capitoli, organizzati secondo la struttura che riporto brevemente nel seguito:

- CAPITOLO 1: questa sezione riguarda la definizione del percorso didattico e l'elaborazione di un'ipotesi di trasposizione dell'oggetto matematico da trattare, alla luce dei vincoli istituzionali imposti da una consolidata tradizione scolastica, dell'osservazione condotta nella fase preliminare del tirocinio e di alcuni risultati basilari della ricerca in Didattica della Matematica.
- CAPITOLO 2: in questa seconda parte viene riportata una cronaca ragionata dell'intera esperienza in classe e un'analisi approfondita, e corredata da protocolli, di alcune delle criticità emerse durante l'intervento.
- CAPITOLO 3: questa sezione è dedicata ad aspetti legati alla valutazione, intesa nella duplice accezione di misurazione del profitto degli studenti e di analisi del ritorno informativo sull'efficacia dell'azione didattica.

Seguono una riflessione conclusiva, e una lista di allegati, contenente il Progetto di Tirocinio da me redatto a monte dell'intervento didattico, dopo il periodo di osservazione in classe, e le prove più significative assegnate durante il percorso.

CAPITOLO 1
DEFINIZIONE DEL PERCORSO

1.1 Il tema del percorso: la fattorizzazione di polinomi e le frazioni algebriche

Tema del percorso didattico da me ideato e realizzato, è la trattazione di due argomenti tradizionalmente inclusi in ogni curricolo di algebra del primo anno della scuola secondaria superiore: la fattorizzazione dei polinomi e le frazioni algebriche, il cui studio ricade, per attenersi al vocabolario dei libri di testo più comunemente usati, sotto la voce del *calcolo letterale*.[1]

Si assiste, ormai da diversi anni, ad un tentativo di reinterpretare la tradizionale suddivisione in moduli didattici dei vecchi programmi scolastici, sotto la chiave dei *nuclei fondanti*, nella direzione di una matematica non rigidamente impostata secondo un'organizzazione sequenziale dei contenuti, quanto piuttosto secondo un equilibrato accostamento di aree concettuali tra loro interdipendenti. In quest'ottica l'oggetto della mia esperienza di tirocinio trova la sua collocazione, in riferimento alla classificazione proposta dall'Unione Matematica Italiana (UMI, 2003), all'interno del nucleo "*Numeri e Algoritmi*", ma presenta evidenti rapporti anche con l'area tematica "*Relazioni e Funzioni*", prestandosi poi a fornire dei validi strumenti di approccio a problemi inerenti i due nuclei trasversali "*Argomentare, congetturare, dimostrare*" e "*Risolvere e porsi problemi*".

L'intervento didattico qui descritto si inserisce in un percorso curricolare tradizionale, che prevede, per una classe prima di un liceo scientifico, la trattazione dell'argomento in oggetto dopo una prima introduzione alla manipolazione di espressioni simboliche, ed i dovuti richiami ad elementi di teoria degli insiemi e di calcolo numerico in $\boldsymbol{Q}$.

[1] E' questa, del resto, la terminologia adottata anche nel Syllabus di Matematica (UMI, 1999), nell'individuazione dei *saperi minimi* indispensabili per l'accesso ai corsi di laurea ad indirizzo scientifico.

1.2 Il contesto

Il contesto nel quale si inquadra questo lavoro, come ho avuto già modo di dire in fase di stesura del progetto di tirocinio, è quello di una classe che non presenta particolari criticità dal punto di vista disciplinare, nella quale però è stato possibile rilevare, già in fase di osservazione, manifestazioni evidenti di situazioni diffusamente studiate in Didattica della Matematica. Citerei qui, brevemente:

- la predilezione, da parte degli studenti, di un approccio marcatamente procedurale al calcolo simbolico, che rischia di oscurare (se non opportunamente guidato verso un più maturo stadio di conoscenza) gli aspetti strutturali della disciplina (Sfard, 1991);
- la tendenza di molti degli allievi ad accettare passivamente quanto studiato e a manipolare, anche con discreta abilità, i simbolismi loro introdotti, senza alcuna attenzione al *significato* di cui tali simboli sono portatori, in accordo con un *modello* di algebra (purtroppo difficile da sradicare), come collezione di trucchi ed artifici finalizzati alla soluzione di esercizi, più che come valido "*strumento di pensiero*" (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994);
- difficoltà nella "messa in formula" di un problema espresso nel linguaggio naturale, a cominciare dalle scelte da operare nel delicato processo di *nominalizzazione*[2] (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994);
- vistosi problemi di *verbalizzazione*, quando venga richiesto di giustificare un passaggio o di esplicitare il processo mentale seguito, che testimoniano da una parte una scarsa padronanza del linguaggio algebrico, cui la classe è stata da poco introdotta, dall'altra, ancora una volta, l'assenza di controllo razionale nell'applicazione delle regole di calcolo;

Su questi e su altri punti chiave della ricerca didattica, avrò occasione di tornare nel prossimo capitolo, avendo cura di riportare, con la massima fedeltà agli eventi, un'ampia casistica di esempi concreti in cui mi è parso

[2] Il processo di *nominalizzazione* "*consiste nell'assegnare nomi agli elementi del problema in modo da incorporarvi il senso del problema stesso*" (Bazzini, 2001).

di rintracciare più chiaramente la manifestazione delle criticità qui raccolte in sintesi.

1.3 L'oggetto matematico: i polinomi

L'oggetto matematico sotteso dall'intero percorso didattico qui proposto, è il *polinomio*.

Un inquadramento teorico del lavoro richiederebbe l'introduzione di tale nozione attraverso il ricorso ad uno dei seguenti modelli:

a. **Modello formale**: i polinomi sono visti come rappresentanti della chiusura algebrica di un insieme, ottenuto come estensione di un anello commutativo unitario *A* (o di un campo *K*) con uno o più elementi trascendenti, denominati "indeterminate". Somma e prodotto di polinomi si ricavano, allora, per naturale estensione all'anello "chiusura" delle definizioni di somma e prodotto in *A* (rispettivamente, in *K*).

b. **Modello "vettoriale"**: dato un anello commutativo unitario *A* (o un campo *K*), i polinomi vengono definiti come n-uple ordinate di elementi di *A* (rispettivamente, di *K*). Si dà luogo, in questo modo, all'insieme *P* di tutti gli oggetti $(a_0, a_1, ..., a_n)$, con $a_i \in A$ ($a_i \in K$), per ogni $i \in \boldsymbol{N}$, ottenuti al variare di *n* in **N**. La somma in *P* ed il prodotto per un elemento dell'anello si definiscono, in modo piuttosto agevole, rifacendosi alle definizioni di somma e di prodotto per scalari in uno spazio vettoriale, dopo aver avuto l'accortezza, nel caso della somma, di rendere tra loro omogenee le dimensioni delle n-uple considerate: dati gli elementi $(a_0, a_1, ..., a_n)$ e $(b_0, b_1, ..., b_m)$, con $n \geq m$, la loro somma in *P* sarà dunque data dalla somma vettoriale in A^{n+1} (rispettivamente, in K^{n+1}), di $(a_0, a_1, ..., a_n)$ e della n-upla $(b_0, b_1, ..., b_m, 0, ..., 0)$, ottenuta da $(b_0, b_1, ..., b_m)$ semplicemente aggiungendo in coda $n - m$ zeri. Qualche problema in più nasce nel voler dotare l'insieme *P* in questione di una struttura moltiplicativa, andando così a definire, in modo un po' macchinoso, il *prodotto* tra $(a_0, a_1, ..., a_n)$ e $(b_0, b_1, ..., b_m)$, come quell'unica n-upla $(c_0, c_1, ..., c_l)$, con $l = n + m + 1$, i cui elementi c_i si ottengano, per “convoluzione”, sommando tutti i prodotti del tipo $a_j b_k$, con $j + k = i$.

c. **Modello “funzionale”**: dato un anello commutativo unitario *A* (o un campo *K*), i polinomi vengono interpretati come funzioni *f*, di una o più variabili, da A^n in *A* (rispettivamente, da K^n in *K*), che alla n-upla di valori $x \equiv (x_1,...,x_n)$ associano un elemento $f(x)$, dato dalla somma algebrica finita di termini della forma $c \cdot x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot ... \cdot x_n^{m_n}$, con $c \in A$ (rispettivamente, $c \in K$). Tale elemento, nel caso di funzioni ad una variabile, si scrive, molto più semplicemente, come $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$. Le definizioni di somma e prodotto di polinomi, in questo caso, discendono direttamente da quelle di somma e prodotto in *A* (rispettivamente, in *K*), secondo le relazioni:
   - $f \oplus g(x) := f(x) + g(x)$;
   - $f \otimes g(x) := f(x) \cdot g(x)$;

   rendendo agevole la verifica delle proprietà di *anello* della struttura così costruita.

1.4 Alcune considerazioni di carattere didattico-disciplinare

Il primo dei tre approcci illustrati nel precedente paragrafo rischia di risultare molto astratto, proponendo l’oggetto “polinomio” nella veste di un’entità alfanumerica cui è difficile attribuire un significato, per quanto la sua manipolazione sia rigorosamente guidata dalle relazioni formali che regolano la struttura algebrica di anello.
Altrettanto astratto è il modello che, con un abuso del termine, ho denominato “vettoriale”. Se da una parte, infatti, esso presenta il vantaggio di trattare l’oggetto “polinomio” senza dover ricorrere all’introduzione di indeterminate di dubbio significato, dall’altra costringe ad una definizione di prodotto decisamente poco intuitiva, rendendo parallelamente altrettanto macchinoso ricavare il quoziente di due polinomi dati.
Tale modello è inoltre fondato sull’identificazione, per *isomorfismo*, di oggetti del tipo $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, con le *n-uple* ordinate, per comodità in

senso inverso, dei coefficienti che in essi compaiono.[3] Essa si presta dunque a definire esclusivamente insiemi di polinomi in una sola indeterminata. Questo aspetto, comunque, non sembra essere percepito come un limite dall'Unione Matematica Italiana che, in coraggiosa controtendenza rispetto ad una pratica didattica piuttosto diffusa, suggerisce di trattare, nel primo anno del biennio, solo questo genere di polinomi (UMI, 2003), in favore di un più consapevole controllo sul significato di un'espressione letterale.

Di contro, un approccio di questo tipo risulta essere vantaggioso in vista di un'introduzione alla programmazione, e al trattamento di polinomi, mediante l'uso di calcolatrici grafico-simboliche (Barozzi, 2001). Se, quindi, introdurre l'oggetto "polinomio" come n-upla ordinata può rischiare di generare un'immagine debole, dal punto di vista semantico, suggerendo l'opportunità di una prima trattazione del tema tramite il ricorso a scritture del tipo $a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, la natura "vettoriale" di tali scritture può essere utilmente recuperata a posteriori, in virtù dell'identificazione tra polinomi ed n-uple ordinate, cui poco fa facevo riferimento.

Osservo solo, incidentalmente, che nel caso in cui i polinomi siano stati introdotti come funzioni, bisognerà mettere in guardia gli studenti sul senso di tale identificazione. Se l'anello dei coefficienti considerato non è un dominio infinito, infatti, la corrispondenza "funzioni polinomiali-vettori" non è un isomorfismo, per le ragioni su cui tornerò fra qualche riga.

In ogni caso, esplicitare questa corrispondenza e suggerire semplici esercizi di programmazione volti a ricostruire gli algoritmi di calcolo del prodotto o del quoziente tra due polinomi, avrebbe il vantaggio di rendere gli studenti consapevoli del fatto che l'informazione sul risultato di tali algoritmi possa essere conservata da una semplice lista ordinata di coefficienti, aprendo anche la strada ad una migliore comprensione, ad esempio, della "regola di Ruffini", troppo spesso accettata passivamente come una stravagante ricetta di calcolo, da affidare alla semplice memorizzazione (Villani, 2003).

Contrariamente alle due precedenti impostazioni, l'approccio "funzionale" è più intuitivo ed offre l'innegabile vantaggio di dare maggiore concretezza

[3] A rigore, l'isomorfismo sopra menzionato associa l'oggetto $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, alla classe di equivalenza, in *P*, di $(a_0, a_1, ..., a_n)$, secondo la relazione che identifica due n-uple che differiscano soltanto per uno o più zeri posti in coda.

semantica all’oggetto “polinomio”. Inoltre, riducendo il problema delle trasformazioni letterali, alla manipolazione di ben noti elementi dell’anello (rispettivamente del campo) di volta in volta trattato, essa rende immediata la verifica di tutte le proprietà di cui godono le operazioni di somma e di prodotto tra polinomi.

Per introdurre la nozione di “grado” di un polinomio (o di “grado rispetto ad una variabile”, nel caso di funzioni a più variabili), è necessario però fare riferimento al “Principio di identità dei polinomi” che, in una delle sue tante formulazioni, afferma che due polinomi sono *formalmente uguali* (i.e. hanno lo stesso grado e, scritti in forma normale, hanno i coefficienti ordinatamente uguali) se e solo se essi inducono la stessa funzione polinomiale.

Infatti, se non ci si pone nel contesto di validità del principio sopra enunciato, ossia se non si impone che l’anello o il campo considerati abbiano una struttura di dominio infinito, non si ha la possibilità di definire univocamente il grado di una funzione polinomiale. Si pensi, ad esempio, all’anello delle funzioni polinomiali da $\boldsymbol{Z}_2$ in $\boldsymbol{Z}_2$ (con $\boldsymbol{Z}_2$ “campo delle classi resto modulo 2”), in cui $f : x \mapsto x^2 + x$ e la funzione identicamente nulla sono tra loro equivalenti.

E’, questo, un passaggio delicato, il cui peso può facilmente sfuggire, soprattutto nel caso in cui non si possa contare, come accade in una prima liceo, sulla conoscenza di anelli (o di campi) finiti per cui il “Principio di identità dei polinomi” non è soddisfatto: per tornare all’esempio appena portato, se si sceglie di lavorare in $\boldsymbol{Z}_2$, i cui elementi possono essere indicati con 0 e 1, le funzioni del campo in sé sono soltanto 4, e sono rappresentabili mediante i polinomi 0, 1, x e $1+x$; ogni altro polinomio induce una delle funzioni appena descritte.

Tutti e tre i modelli illustrati richiedono, peraltro, la padronanza di conoscenze teoriche che difficilmente appartengono al bagaglio cognitivo di uno studente di un primo anno di scuola secondaria superiore.

Il primo e il secondo modello, infatti, si fondano su concetti algebrici avanzati, come la nozione di “anello” o di “campo”, di “chiusura algebrica” e di “elemento trascendente”, o l’idea di “campo vettoriale” e di “relazione di equivalenza”. Esse, inoltre, presuppongono una visione marcatamente strutturale della disciplina, visione che rappresenta solitamente un traguardo, raggiunto solo in una fase matura del processo di apprendimento, come ha messo bene in evidenza la ricerca didattica, nello studio della formazione dei concetti, alla luce della teoria psicologica degli schemi cognitivi. A tale proposito, così si esprime Anna Sfard (1991), che nel suo articolo sulla doppia natura delle concezioni matematiche individua le tappe dell'apprendimento nei tre stadi di *interiorizzazione*, *condensazione* e *reificazione*[4]:

"*Aspettarsi che una persona possa giungere ad una concezione strutturale senza una precedente comprensione operativa sembra irragionevole, come sperare che possa comprendere lo schema bidimensionale di un cubo senza familiarità con il suo modello tridimensionale nella vita reale*".

Quanto alla presentazione funzionale, essa è di certo più in linea con un approccio *procedurale* al trattamento di espressioni simboliche. La stessa definizione di polinomio nella veste di *funzione*, con le dovute sfumature, rese anche dalle scelte sintattiche operate[5], evoca l'idea di una regola di calcolo atta ad operare trasformazioni su una variabile numerica assegnata. Nonostante questo, anche quest'approccio si basa su un concetto, quello di *funzione*, che trova una sofferta collocazione nei tradizionali curricoli dei primi anni del liceo.

Le considerazioni appena sviluppate scoraggiano quindi un'introduzione troppo formale dell'argomento, a meno, ovviamente, di ripensare criticamente all'organizzazione dei contenuti dell'intero curricolo scolastico, come qualche libro di testo isolato sembra suggerire[6]. Ogni ipotesi di ristrutturazione si scontra poi, inevitabilmente, con un'inerzia di fondo del sistema scolastico, nel cambiare ciò che è consolidato dominio della tradizione didattica, inerzia che spesso trae fondamento e supporto da un'esperienza che negli anni sembra aver portato buoni frutti.

Non solo: una riformulazione dei curricoli scolastici in favore di un'impostazione assiomatica o comunque troppo formale della disciplina sembra essere sconsigliata da molti risultati della riflessione in Didattica

---

[4] Secondo l'analisi della Sfard, è solo nel processo di *reificazione* che un *processo* "*solidifica*", per usare le sue parole, in un *oggetto*, in una struttura statica astratta.

[5] Utilizzare notazioni del tipo $f : x \mapsto y$ o $f : x \mapsto f(x) = y$ incoraggia la costruzione di un *modello* dinamico-procedurale di funzione, mentre scritture come $(x, y) \in f$ richiamano una visione statica dello stesso concetto.

[6] Si veda, ad esempio, il manuale a cura di E. Gallo riportato in bibliografia, sulla cui impostazione mi soffermerò nel prossimo paragrafo.

della Matematica, che mettono bene in evidenza come ciò che è facilmente acquisibile, ad un primo contatto con la materia, non sempre corrisponda a quelli che sono i fondamenti delle scienze accademicamente intese; come, cioè, "*non ci sia coincidenza tra elementi primi per uno studente alle prime armi e termini primitivi in Matematica*" (D'Amore, 2004).

Ecco allora che, nel progettare un intervento didattico, si impone inevitabilmente un compromesso tra quello che è il "sapere scientifico accreditato" da una parte e, dall'altra, i vincoli istituzionali, i suggerimenti dell'esperienza, ma anche i limiti cognitivi accertati, di coloro che sono invitati a farsi carico dell'azione di costruzione della conoscenza.

1.5 I libri di testo

La complessa dialettica di interpretazioni appena figurata, trova inevitabilmente riflesso anche nei libri di testo, come emerge dall'analisi comparata di alcuni tra i più diffusi manuali per le scuole superiori, che per chiarezza riporto nella sezione finale della bibliografia. Nelle loro scelte di impostazione, essi rivelano infatti l'adesione, più o meno fedele, ad uno dei modelli sopra esaminati.

In "Matematica come scoperta", di Prodi, si rintraccia ad esempio una visione fondamentalmente procedurale del calcolo letterale, rafforzata anche dal ricorso all'idea di "macchina di calcolo" e dall'uso di *grafi* nella rappresentazione delle operazioni applicate.

Un approccio operativo è anche quello adottato da Speranza e Rossi dell'Acqua, che nelle loro scelte lessicali (parlano, ad esempio, di "Calcolo con le lettere al posto dei numeri"), rivelano un'attenzione agli elementi di continuità nel passaggio dall'aritmetica all'algebra.

Il testo di Lazzarini, Sarnataro, invece, pur non rinunciando ad una prima presentazione dell'oggetto "polinomio", e del calcolo letterale in generale, in linea con le precedenti impostazioni, dedica, in una seconda fase, un intero capitolo, all'illustrazione formale delle strutture algebriche di anello e di campo, riconoscendo nell'insieme $P(+,\cdot)$ di tutti i polinomi a coefficienti razionali (o reali), un anello commutativo unitario, e mettendo bene in luce come il passaggio da un ambiente operativo allo studio di una *struttura*, richieda un'operazione di astrazione fondata sull'individuazione

di proprietà formali condivise tra l'ambiente in questione ed altri contesti operativi.
Più sbilanciato verso la polarità strutturale è il libro a cura di E. Gallo, che premette alla trattazione dei più comuni insiemi numerici (***N***, ***Z*** e ***Q***), la presentazione sistematica e rigorosa delle strutture algebriche fondamentali, riservandosi poi di inquadrare il calcolo letterale tra espressioni a coefficienti in ***Q***, nel contesto dei numeri razionali. Definisce infatti *espressione monomia* in ***Q***, "*un qualunque prodotto di numeri razionali, alcuni dei quali nominati direttamente, altri nominati indirettamente attraverso lettere che indicano variabili in* ***Q***", evocando così l'idea di sostituzione numerica e quindi anche il concetto di *funzione*.
Per inciso, la scelta di servirsi di *monomi* come enti funzionali all'introduzione dei polinomi (definiti dai più come "*somma algebrica di monomi*", appunto), è condivisa da molti autori, oltre ad essere una diffusa pratica scolastica. I libri di testo sopra esaminati non fanno eccezione, né si discosta da questa scelta il manuale adottato dalla mia tutor: "Nuovo corso di algebra per il biennio delle scuole superiori", di Dodero, Baroncini, Manfredi. La classe nella quale ha avuto luogo l'intervento qui descritto è quindi entrata in contatto per questa via col concetto di polinomio.
Una tale impostazione trova un parere contrario (e non si tratta dell'unica voce discorde), nell'Unione Matematica Italiana, che giudica inutile e fuorviante l'introduzione di definizioni accessorie, come quella di monomio, quando in realtà l'unico ente che, in tema di calcolo letterale, possegga lo statuto di "oggetto matematico", è il *polinomio*.

1.6 Un'ipotesi di trasposizione didattica e la sua attuazione

La costruzione dell'ipotesi di trasposizione didattica che vado ora a descrivere, e su cui si è fondata la mia esperienza in aula, da una parte ha risentito delle considerazioni appena sviluppate, dall'altra è stata guidata da scelte di coerenza e di continuità rispetto al percorso didattico avviato dall'insegnante, prima del mio arrivo.
L'oggetto di tale trasposizione è quasi esclusivamente rappresentato dai polinomi a coefficienti razionali e dalle frazioni algebriche ottenute da questi, per divisione, in linea con una diffusa consuetudine scolastica,

fondata sul fatto che in questa fase non si possa ancora contare sulla conoscenza (se non intuitiva nel caso dei reali) di insiemi numerici come ***R*** o ***C***, o del già citato campo delle classi resto modulo *n*, con *n* naturale.

La scelta operata è stata quella di un approccio fondamentalmente operativo al concetto di polinomio e al calcolo letterale in generale, attraverso, ad esempio, l'illustrazione di tecniche di fattorizzazione, finalizzate alla trasformazione di somme algebriche nel prodotto di termini polinomiali (vedi paragrafo 2.1.2).

Ho ritenuto però che tale scelta, dettata dai più che fondati criteri espressi nel precedente paragrafo, non dovesse oscurare gli aspetti strutturali dell'oggetto trattato.

In fase di intervento in aula ho creduto, quindi, opportuno lasciar emergere, per quanto non formalizzati nella veste rigorosa di veri e propri assiomi, definizioni o teoremi matematici, alcuni elementi a mio parere irrinunciabili della teoria sottesa dai temi del percorso. Ne propongo qui un sintetico elenco, riservandomi di tornare più avanti su molti dei punti evidenziati:

- l'unicità della fattorizzazione in elementi irriducibili in $\boldsymbol{Q}[x]$, a meno di elementi invertibili del campo ***Q*** dei coefficienti;
- l'idea intuitiva del concetto di "irriducibilità"[7] e la sua dipendenza dal campo (o anello) dei coefficienti scelto: l'esempio tipico, spesso riportato dai libri di testo e facilmente accessibile a studenti di una prima liceo, è quello di $x^2 - 2$, irriducibile in $\boldsymbol{Q}[x]$ ed equivalente, in $\boldsymbol{R}[x]$, al prodotto $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$. Più sottile, per quanto altrettanto elementare, è l'esempio di $2x+2$ (a rigore irriducibile in $\boldsymbol{Q}[x]$, ma non in $\boldsymbol{Z}[x]$), ritenuto fuorviante, a questo livello di scolarizzazione, da molti docenti;
- il problema della "chiusura" di un insieme algebrico (come quello dei polinomi a coefficienti in un campo, o quello delle frazioni algebriche ottenute dividendo tra loro due di questi polinomi) rispetto alle operazioni elementari;
- l'esistenza di due distinti elementi neutri, relativi alle operazioni di somma e di prodotto tra polinomi, o tra frazioni algebriche;

[7] Formalmente, in un dominio di integrità A, un elemento p non invertibile e diverso da zero si dice irriducibile, se quando $p = a \cdot b$, con $a, b \in A$, allora uno tra a o b è invertibile.

- l’esistenza di un inverso additivo (*opposto*) e, nel caso delle frazioni algebriche, di un inverso moltiplicativo (*reciproco*) per ogni elemento assegnato diverso da zero.

Mi sono poi servita, con le cautele espresse gia in fase di stesura del progetto di tirocinio (Allegato 1), del richiamo sistematico all’analogia tra i temi trattati e i contesti numerici noti, nella convinzione che da tale richiamo potesse venire un ulteriore contributo alla costruzione di una visione strutturale dell’argomento, oltre che alla comprensione dei punti appena visti. In questo senso affiancare $\boldsymbol{Z}$ a $\boldsymbol{Q}[x]$, nel parlare di “elemento irriducibile”, di “massimo comun divisore” o di “fattorizzazione unica”, ha avuto il preciso scopo di evocare la struttura di anello euclideo. Allo stesso modo, accostare $\boldsymbol{Q}$ all’insieme delle frazioni algebriche a coefficienti razionali (ad esempio nella loro introduzione come estensioni di $\boldsymbol{Z}$ e rispettivamente di $\boldsymbol{Q}[x]$, finalizzate alla ricerca di chiusura rispetto all’operazione di divisione), ha avuto la funzione di suggerire l’idea di campo algebrico.

In riferimento a quanto detto nel paragrafo 1.3, l’approccio teorico adottato nel corso dell’intervento è stato il frutto di un compromesso tra il modello formale e quello funzionale, visti e reinterpretati in funzione dei destinatari dell’azione didattica.

La mancata padronanza della nozione di funzione[8], ha impedito, ad esempio, una definizione rigorosa, in questa luce, dell’oggetto “polinomio”, del resto già introdotto dall’insegnante, come già detto, come somma algebrica di monomi, secondo una linea più vicina al modello formale, peraltro altrettanto improponibile nella sua veste rigorosa.

La natura funzionale di quest’ultimo, però, non ha potuto fare a meno di emergere non appena si è parlato di *zeri* di un polinomio dato (per esempio a proposito del teorema di Ruffini) o di *equivalenza* fra due distinti polinomi (come uguaglianza verificata per ogni valore della variabile considerata) o di *campo di esistenza* di una frazione algebrica.

---

[8] Incidentalmente, la consuetudine di rimandare, nella pratica didattica, lo studio sistematico dell’oggetto “funzione” agli anni di corso successivi al primo, lasciando che gli aspetti funzionali dei temi trattati rimangano a lungo taciuti (per quanto sempre latenti), secondo alcune ricerche in Didattica della Matematica crea non pochi ostacoli sul piano dell’apprendimento.

Nel pianificare, prima, e poi nel mettere in atto una trasposizione didattica, si è poi imposta una serie di scelte terminologiche, anche queste guidate da un'attenzione ai destinatari dell'intervento, sia nei termini delle conoscenze da loro possedute, sia in considerazione delle loro precedenti abitudini lessicali: ho dunque parlato di "zeri" di un polinomio piuttosto che di "radici" o di "operazione interna" ad un insieme, piuttosto che di "chiusura" del suddetto insieme rispetto ad un'operazione, per coerenza con il vocabolario già in uso prima del mio intervento (come ho avuto modo di constatare nella fase di osservazione).

Ho poi scelto di servirmi del termine "fattorizzazione", più tecnico ed immediato nell'evocare l'idea di fattore, e di un contesto moltiplicativo, piuttosto che del generico termine "scomposizione".

In fase di intervento, per sciogliere ogni ambiguità interpretativa, la definizione di fattorizzazione è stata da subito concordata con la classe, come riduzione di un polinomio nel prodotto di fattori di grado più basso (definizione che porta ad accettare come valida la trasformazione del polinomio $x^4 - 1$ nel prodotto $\left(x^2 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)$), con l'avvertenza che ove fosse specificato, si dovesse procedere ad una fattorizzazione in termini irriducibili.

Sulla scorta dei consigli dell'Unione Matematica Italiana e di una ricerca didattica, in matematica, attenta alla costruzione del significato, ho evitato di proporre esercizi ripetitivi ed inutilmente densi di calcoli, soffermandomi invece su osservazioni volte a mantenere sempre vivo il controllo razionale sulle trasformazioni eseguite. Per dare degli esempi concreti, ho più volte suggerito:

- di verificare sempre che la somma dei gradi dei polinomi che compaiono nel prodotto ottenuto da una fattorizzazione, corrisponda al grado del polinomio assegnato in partenza;
- di controllare che le formule di volta in volta proposte fossero coerenti con le regole di calcolo gia conosciute, anche a fronte di constatazioni imbarazzanti come il fatto che, non ricordando come si sviluppi, ad esempio, il cubo del binomio $x + 1$, in pochi sappiano ricorrere al più tradizionale prodotto $(x+1)(x+1)(x+1)$.

Ho poi ritenuto importante affrontare con cautela, e con le dovute precisazioni, alcuni punti a mio parere delicati, al fine di ad evitare sul

nascere la formazione di idee distorte e modelli sbagliati (a volte incoraggiata, a mio parere, anche dai libri di testo).
Solo a titolo di esempio:

- gli esercizi proposti dai più diffusi manuali, sembrano suggerire l'idea che un polinomio di grado "alto", sia sempre fattorizzabile, quando è in realtà molto improbabile che inventando una sequenza casuale di coefficienti si dia luogo ad un'espressione riducibile. Presentare esempi di polinomi non fattorizzabili, aprendo eventualmente anche una finestra su semplici dimostrazioni di irriducibilità (vedi paragrafo 2.3.2), può risultare allora molto formativo;
- il fatto che molti libri di testo presentino i più comuni metodi di fattorizzazione sotto forma di una rigida tabella di ricette da applicare secondo un ordine prestabilito, rischia di lasciar passare l'idea che il problema della fattorizzazione si riduca ad uno schema esaustivo di trucchi di calcolo. E' però vero che trovare un giusto equilibrio tra obiettivi di efficienza didattica (raggiunta spesso anche grazie all'uso di schematizzazioni) ed esigenze di qualità dell'apprendimento, è un problema tutt'altro che banale.

CAPITOLO 2
L'INTERVENTO IN CLASSE

2.1 Cronaca degli eventi

Il percorso didattico da me sviluppato si è articolato secondo un impianto globalmente fedele all'organizzazione in fasi pianificata al momento della progettazione (Allegato 1). Rispetto a quest'ultima, infatti, non ci sono state variazioni nella scelta dei contenuti, con l'unica eccezione della rinuncia, per motivi di tempo, alla presentazione dell'algoritmo di Euclide per il calcolo del *massimo comun divisore*, che peraltro avrei ritenuto fortemente formativa.

Ho invece creduto opportuno, in risposta ai segnali ricevuti dalla classe o per questioni prettamente organizzative, operare modifiche alla ripartizione dei tempi stabilita a monte dell'intervento, nonché all'ordinamento cronologico delle fasi.

Riporto nel seguito una descrizione sintetica e non sequenziale degli eventi, riservandomi di commentare, nei paragrafi successivi, alcune delle criticità emerse nel corso della sperimentazione.

2.1.1 Test preliminare per l'accertamento dei prerequisiti [1 ora]

Nella fase iniziale del percorso, ho proposto alla classe un test che riporto in allegato (Allegato 2), mirante all'accertamento dei prerequisiti individuati nella stesura del progetto (Allegato 1). La prova è stata assegnata assieme ad un compito in classe, preparato dalla mia tutor.

Su suo suggerimento, e contrariamente a quanto pianificato prima dell'intervento, ho previsto un voto per la prova, mettendone a conoscenza i ragazzi, con l'unico scopo di motivare gli allievi a compilare anche la mia scheda, piuttosto che dedicare integralmente le due ore a disposizione, al compito assegnato dalla loro insegnante.

I quesiti raccolti nel test avevano l'obiettivo di verificare l'effettivo possesso di:

- conoscenze aritmetiche di base: proprietà distributiva e invariantiva, nozione di reciproco e concetto di frazione numerica;

- competenze relative al nucleo concettuale "*Numeri e Algoritmi*" (UMI, 2003): confrontare due frazioni numeriche e verificare la loro eventuale equivalenza, verificare la correttezza di un'uguaglianza aritmetica e riconoscervi l'applicazione di una proprietà nota, trattare consapevolmente con la nozione di "minimo comune multiplo".

Il test doveva anche servirmi ad accertare il dominio di un vocabolario di base sul quale poter contare nel corso delle mie lezioni.

I risultati della prova, mediamente buoni, hanno confermato come acquisite molte delle conoscenze/competenze sopra menzionate, evidenziando però vistose difficoltà di verbalizzazione, laddove si richiedeva di giustificare la risposta data, e una scarsa familiarità con le proprietà aritmetiche quotidianamente applicate (cosa che avrò occasione di analizzare più avanti).

Significativo è il fatto che quasi tutti abbiano riconosciuto le due uguaglianze corrette, tra le quattro opzioni proposte nell'esercizio 3, ma che in moltissimi abbiano avuto difficoltà ad individuare la proprietà applicata.

Dal test è emerso anche, in linea con i risultati di Mariotti, Cerulli (2003), un approccio marcatamente procedurale nella risoluzione dei quesiti. In molti, infatti, hanno risposto all'esercizio 1, in cui si richiedeva di individuare la minore tra quattro frazioni proposte, ricavando con l'aiuto della calcolatrice la rappresentazione decimale associata ad ognuna di esse. Allo stesso modo, diversi studenti hanno valutato la correttezza delle uguaglianze dell'esercizio 3, mettendo a confronto i risultati numerici ottenuti a destra e a sinistra dell'uguale.

2.1.2 Fattorizzazione di polinomi: le tecniche più comuni [11 ore]

Il primo macro-argomento del mio percorso, la fattorizzazione di polinomi, ci ha tenuto impegnati per circa un mese, secondo una ben equilibrata ripartizione dei tempi tra momenti di spiegazione frontale, interrogazioni alla lavagna ed occasioni di attività a-didattiche o di animata discussione.

Ritenendo inopportuna un'impostazione troppo formale dell'argomento, poco intuitiva e difficilmente proponibile in una prima classe di liceo, ancora povera di strumenti teorici cui fare riferimento, ho introdotto il complesso tema della fattorizzazione attraverso un semplice indovinello, funzionale a conquistare l'interesse e l'attenzione della classe:

Pensa ad un numero da uno a dieci. Fanne il quadrato. Sottrai un'unità. E' vero che il numero che hai trovato può scriversi come prodotto di due fattori che differiscono tra loro di due unità?

La cosa ha subito evidenziato negli allievi difficoltà di traduzione del *senso* del problema nel codice algebrico, un *ostacolo*, ampiamente studiato in didattica (Bazzini, 2001, Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994), cui ho già fatto cenno nel primo capitolo.

In seguito sono più volte incorsa nel medesimo problema, emerso in forma evidente nel corso di un lavoro di gruppo che avrò occasione di commentare più avanti. Per sollecitare, dunque, competenze di *nominalizzazione* e di formalizzazione di enunciati espressi nel linguaggio naturale, ho spesso assegnato agli allievi esercizi come questo:

Dimostrare che un numero di due cifre sommato al numero che si ottiene scambiando le sue cifre, dà come risultato un multiplo di 11.[9]

Dopo aver costruito, con l'aiuto della classe, una definizione condivisibile di "fattorizzazione" come riduzione di un polinomio nel prodotto di fattori di grado più basso (vedi paragrafo 1.6), anche sulla scorta di quanto tutti già conoscevano nel contesto degli interi, ho presentato i più comuni metodi di trasformazione, utili allo scopo.

Ho mostrato loro la tecnica del "raccoglimento a fattor comune totale e parziale", facendo esplicito riferimento alla proprietà distributiva in essa sfruttata.

Sono poi passata a presentare il riconoscimento di prodotti notevoli, fase che ha richiesto meno tempo del previsto, permettendomi così di dedicare maggiore attenzione alle difficoltà segnalate dagli studenti in altri passaggi del percorso didattico.

Ho proseguito illustrando loro alcuni trinomi "speciali" di secondo grado, del tipo $x^2 + (a+b)x + ab$[10], facilmente riducibili nel prodotto di due polinomi di primo grado, i cui termini noti vanno ricavati ricercando i due valori (non necessariamente numerici) il cui prodotto dia il termine noto del polinomio assegnato e la cui somma sia data dal coefficiente di grado uno del suddetto polinomio.

---

[9] Il quesito è tratto da "Matematica come scoperta" di G. Prodi.

[10] Il libro di testo adottato dalla mia tutor, "Nuovo corso di Algebra" di N. Dodero, P. Baroncini e R. Manfredi, utilizza per "a" e "b" i caratteri maiuscoli, forse nel tentativo di evidenziare come queste variabili possano a loro volta assumere per valore delle espressioni polinomiali.

Ho mostrato infine come il teorema del resto e la regola di Ruffini, o la stessa divisione tra polinomi, già incontrate nel loro curricolo, fossero, a loro volta, degli utili strumenti per la fattorizzazione di polinomi.

Sia le interrogazioni tradizionali alla lavagna, sia le richieste di chiarimento spontanee, sono servite da pretesto per riflessioni a margine e puntualizzazioni teoriche, nella direzione di un’algebra non direttamente finalizzata alla soluzione di esercizi, quanto piuttosto interpretata, per usare le parole di Arzarello, Bazzini, Chiappini (1994), come valido “*strumento di pensiero*”.

Ho avuto quindi modo di lasciar emergere, incoraggiando quando possibile la loro implicazione diretta nel processo di costruzione di conoscenza, concetti base della teoria matematica sottesa dagli elementi trattati, o più in generale della disciplina nella sua globalità.

Solo a titolo di esempio, dopo aver chiesto ad un ragazzo di procedere alla fattorizzazione in termini non ulteriormente riducibili di un polinomio del tipo $x^2+(a+b)x+ab$, ed aver ottenuto come risposta l’applicazione della formula relativa a quelli che il libro di testo riporta come “trinomi notevoli”, ho chiesto se conoscesse metodi alternativi applicabili al medesimo polinomio, e se si aspettasse, dal loro utilizzo, soluzioni diverse.

Ne è nata un’interessante riflessione sull’unicità della fattorizzazione in irriducibili[11], a meno di costanti moltiplicative, all’interno del contesto trattato (l’insieme dei polinomi a coefficienti razionali) e sulla conseguente necessità che i diversi metodi di fattorizzazione fossero tra loro coerenti. L’episodio mi ha fornito tra l’altro un pretesto per sottolineare come la *coerenza logica* sia un valore importante all’interno di una teoria.

Per fare in modo che i ragazzi percepissero, almeno in forma intuitiva, l’idea di “fattorizzazione unica” a meno di elementi invertibili, ho poi assegnato loro, per casa, un esercizio in cui chiedevo di ricercare fattorizzazioni per x^2-1, alternative alla ben nota scrittura $(x+1)(x-1)$. Al di là delle risposte errate, come $(x)(x)-1$ sui cui varrebbe la pena di riflettere, sono emerse proposte del tipo $-(-x-1)(x-1)$, o $-(x+1)(1-x)$, o

[11] Per l’introduzione del concetto di irriducibile, la cui definizione rigorosa richiederebbe conoscenze più avanzate, in fatto di strutture algebriche, mi sono servita dell’analogia con la nozione di numero primo, nel contesto degli interi, lasciando passare in forma intuitiva l’idea di un termine non ulteriormente fattorizzabile.

ancora $2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$, che mi hanno permesso di mostrare loro come la scelta di una scrittura tra tante non sia altro, alle volte, che il frutto di una *convenzione*, o di un *criterio di opportunità* legato alle richieste del problema di volta in volta affrontato.

2.1.3 Lavoro di gruppo sulla fattorizzazione di polinomi [1 ora]

Come già previsto a monte dell'intervento, ho ritenuto formativo dedicare un'ora del percorso didattico relativo alla fattorizzazione di polinomi, ad un laboratorio di gruppo incentrato sulla discussione di alcuni quesiti non convenzionali (Allegato 3 e 4). Si è trattato di esercizi in parte inventati da me, in parte tratti da libri di testo come quello di Cateni, Bernardi, Maracchia (1983) e di Prodi riportati in bibliografia, o dai Giochi d'Archimede, proposti nei bienni all'interno del Progetto Olimpiadi di Matematica, promosso dall'Unione Matematica Italiana (UMI, 2004).

Ho suddiviso la classe in cinque gruppi di cinque o sei componenti e a ciascuno studente ho assegnato un ruolo ben preciso, ispirandomi in parte all'esperienza condotta da Baldrighi, Fattori, Pesci (2004). Oltre alle figure del *coordinatore*, del *relatore* e del *notaio* suggerite dall'articolo citato, ho trovato utile introdurre per ciascun gruppo due o tre *verbalizzatori*, che avessero il compito di registrare puntualmente le idee vagliate ed eventualmente scartate, i ragionamenti seguiti durante la soluzione del test, i suggerimenti raccolti da me e dalla loro insegnante, i dubbi e le incertezze sui singoli quesiti.

Sul piano motivazionale, come avrò occasione di commentare più avanti, l'esperienza si è rivelata un successo: non appena gli studenti hanno saputo che si stavano confrontando con quesiti delle Olimpiadi di Matematica, hanno affrontato l'attività con grande entusiasmo e spirito propositivo.

Dal lavoro sono emerse però non poche criticità, in gran parte riconducibili ad *ostacoli* legati al concetto di *dimostrazione* e a "*problemi di interpretazione*" (Arzarello, Bazzini, Chiappini, 1994), o per cattiva padronanza dei simbolismi algebrici, o per difficoltà di nominalizzazione, nella messa in formula di una situazione, e di coordinamento di due diversi registri linguistici.

E' il caso dei tentativi di traduzione, nel codice algebrico, del prodotto di due pari consecutivi (Allegato 3, esercizio 3), scritto dagli studenti come "$2n \cdot 4n$" o nella forma ibrida "$2n \cdot 2m$ *con 2n e 2m pari consecutivi*".

2.1.4 Prima e seconda verifica sommativa [1 ora + 1 ora]

A differenza di quanto pianificato in fase di progetto, ho pensato di suddividere la verifica scritta inizialmente pensata come prova conclusiva, in due compiti distinti: il primo, assegnato a metà del percorso, relativo alla fattorizzazione di polinomi; il secondo, incentrato sul trattamento di frazioni algebriche.

Questa scelta potrebbe da un lato aver favorito la visione di fattorizzazione e frazioni algebriche come di due argomenti tra loro indipendenti (cosa che ho comunque tentato di scongiurare sin dal primo giorno, mostrando come tutta la teoria sulla fattorizzazione fosse fortemente funzionale al trattamento di espressioni frazionarie). D'altro lato, però, la suddivisione delle prove mi ha permesso di:

- ricavare maggiori informazioni sul percorso di apprendimento della classe e ripensare di conseguenza alle scelte fatte, in termini di tempi e di strategie;
- registrare i più diffusi *ostacoli* e *falsi modelli* in atto e intervenire più prontamente per una loro soluzione;
- individuare, nella successione temporale delle prove, interessanti percorsi migliorativi.

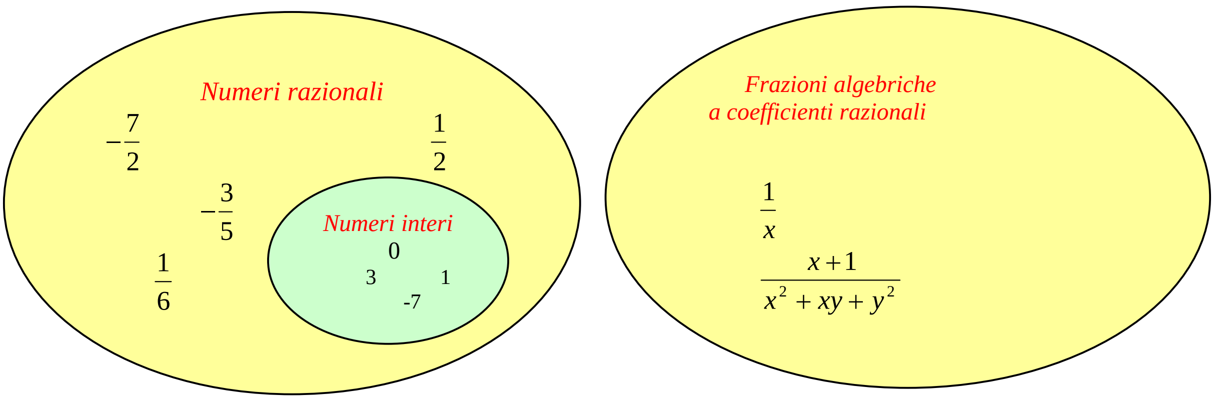
Su questi punti, tornerò, comunque, nel terzo capitolo, dedicato ad aspetti legati alla valutazione, nelle sue diverse accezioni.

2.1.5 Le frazioni algebriche [8 ore]

Il secondo macro-argomento del mio percorso, le frazioni algebriche, ha richiesto l'impiego di 8 ore di lezione, durante le quali ho avuto modo di sperimentare anche la tecnica degli *informes*[12] (Fandiño Pinilla, 2002), che ha dato buoni risultati in termine di partecipazione della classe.

[12] Tecnica diffusa nei Paesi di lingua spagnola, che consiste nell'affidare ad uno studente, all'inizio della lezione, il compito di tenere una sorta di diario commentato di quanto avverrà nell'ora che sta per cominciare (comprese le opinioni espresse, le richieste di chiarimento e gli atteggiamenti dei compagni), con l'impegno di riferire tutto alla classe nella lezione successiva.

Nel presentare le frazione algebriche, facendo leva ancora una volta su analogie con contesti numerici noti (e.g. campo dei razionali) ho ritenuto importante precisare come l'introduzione di oggetti di questo tipo rispondesse ad una necessità di "chiusura" dell'operazione di divisione, non garantita all'interno del ristretto insieme dei polinomi, in tutta analogia con quanto succede nel passaggio dagli interi ai razionali.
In questo, come in altri casi, mi sono servita di diagrammi di Venn, per dare un riscontro grafico immediatamente percepibile delle relazioni di inclusione tra i contesti algebrici di volta in volta trattati:



Per quanto il concetto di funzione non sia ancora dominio di conoscenza di studenti di un primo anno di liceo, mi è sembrato opportuno introdurre da subito l'idea di *campo di esistenza* di una frazione algebrica. L'*ostacolo* in cui sono incorsa, richiedendo ai ragazzi di ricavarlo sempre, per ogni frazione incontrata negli esercizi, è stata la forte diffidenza della classe nell'accettare una consegna che non mirasse ad un risultato, diffidenza ben espressa dalle parole di Edoardo: "*Professoressa, ma non è inutile trovare il campo di esistenza? Io non l'ho fatto mai e gli esercizi mi vengono tutti!*".
Ho allora provocato l'intera classe con un banalissimo problema costruito ad hoc per lo scopo:
Sia dato l'insieme dei rettangoli i cui lati siano l'uno l'inverso dell'altro. Esprimere la legge generale per ricavare l'area dei rettangoli in questione.
Dopo un primo ostacolo, rappresentato, ancora una volta, da difficoltà nella "messa in formula" del problema, si è convenuto per una scrittura dei lati nella forma $b = x$ ed $h = \frac{1}{x}$.

Quanto all'area, grazie a qualche tentativo di rappresentazione dei rettangoli in questione e alla percezione intuitiva di un "caso limite" da escludere (quello per cui $x = 0$ e la figura degenera in una retta) si è giunti alla soluzione $A = 1$, per valori di x diversi da zero.

Il passaggio al *registro geometrico* in questo caso è servito a motivare la ricerca del campo di esistenza di una frazione algebrica, altrimenti difficile da giustificare.

Nel trattamento delle operazioni elementari tra frazioni algebriche, ho potuto contare su una buona capacità di trasporto, negli studenti, di quanto appreso alle scuole medie a proposito di frazioni numeriche.

Non ho quindi avuto particolari difficoltà a parlare di somma, prodotto, quoziente e potenza di frazioni, per quanto indagando più da vicino sul loro approccio ai meccanismi di calcolo, ho alle volte riscontrato incomprensioni di fondo delle tecniche applicate (e.g. calcolo del denominatore comune, commentato più avanti).

2.2 Problemi didattici emersi durante l'intervento: un esempio

Trovo sia interessante, in questa fase, analizzare più in dettaglio alcune delle criticità emerse durante il mio intervento in classe, alla luce delle chiavi di lettura suggerite dalla ricerca nel campo della didattica della matematica.

L'esempio che segue (cui ho deciso di dedicare più spazio, riservando poi al paragrafo successivo la riflessione su altre problematiche, a mio parere significative), mi sembra si presti più di altri a considerazioni di carattere anche molto diverso tra loro, permettendomi così di condurre un'analisi articolata, e di toccare nel contempo numerosi aspetti della didattica.

Si tratta della risposta della classe all'accostamento di due entità matematiche strettamente interdipendenti ed afferenti, per utilizzare la terminologia introdotta da Vergnaud ed ormai ampliamente sfruttata in didattica (D'Amore, 1999) lo stesso *campo concettuale*[13]: il "fattore moltiplicativo" e l'oggetto "divisore".

[13] La *teoria dei campi concettuali* è una teoria psicologica del concetto, il cui scopo principale consiste nel comprendere "*le filiazioni e le rotture fra conoscenze, dal punto di vista del loro contenuto concettuale*". (Vergnaud, 1990)

Dopo aver introdotto la fattorizzazione tra polinomi e mostrato come alcune espressioni polinomiali potessero essere scritte, in modo del tutto equivalente, sotto forma di prodotto di più fattori (senza però far cenno a legami di alcun genere col concetto di divisibilità, trattato diffusamente dalla mia tutor, nel periodo immediatamente precedente il mio intervento), ho posto a Sonia la seguente domanda, nel corso di un'interrogazione:
"*Sapresti dirmi qual è il resto della divisione di* $x^2 + x$ *per* $x + 1$*?* "
Osservo che la ragazza aveva appena operato un "raccoglimento a fattor comune", riscrivendo il polinomio in questione nella forma $x(x+1)$, e che l'uguaglianza continuava ad essere davanti ai suoi occhi, alla lavagna. Nonostante questo Sonia ha scelto di servirsi del teorema del resto e di affidare ai calcoli la risposta al mio quesito; risposta che, peraltro, mi ha fornito senza esitazione nel giro di pochi istanti:
"*E' zero!*"
Il ricorso al teorema del resto, visto di recente con la sua professoressa, era più che prevedibile, tanto più che, nel porre la domanda, ero stata attenta a ricercare la formulazione più tipicamente ricorrente, negli esercizi dei libri di testo relativi alle applicazioni del suddetto teorema. E' questa, se vogliamo, una manifestazione di un *contratto didattico* sempre latente e di un'implicita fiducia, da parte dello studente, nel fatto che la risposta vada ricercata direttamente nel testo della domanda: ecco allora che se avessi chiesto, come ho fatto in altre occasioni, se $x^2 + x$ fosse divisibile per $x + 1$, l'effetto sarebbe stato, molto più probabilmente, l'esecuzione di una divisione tra polinomi, o secondo la procedura tradizionale, o secondo l'algoritmo di Ruffini.
Del resto, fenomeni di questo tipo sono ampliamente documentati in letteratura, e rientrano negli studi di quelle che Laborde chiama *variabili redazionali* (Laborde, 1995), ossia di quelle "*parole che vengono ritenute chiave per la semantica della frase intera e per la scelta del conseguente processo risolutivo da adottare*" (D'Amore, 1999).
"*La cosa ti sorprende, o avresti potuto dedurla in altro modo?*", le ho chiesto, poi, incuriosita.
"*Beh, avrei dovuto eseguire una divisione!*"
"*Oppure?*"
"*Oppure fare Ruffini.*"

“*E non avresti semplicemente potuto osservare con più attenzione la fattorizzazione appena trovata?*”
A Sonia non mancavano gli strumenti per dedurre brillantemente il fatto che il resto fosse nullo dal semplice sguardo della fattorizzazione. Basta osservare che praticamente tutti, in classe, hanno la consuetudine di scrivere sempre, a completamento dell’algoritmo di Ruffini o della stessa divisione tra polinomi, una sequenza di uguaglianze che, per il nostro caso specifico, riporto qui di seguito, depurata da tutti gli abusi di notazioni che mi è capitato di registrare[14]:

$$P(x) = Q(x)(x+1) + R(x)$$

$$Q(x) = x$$

$$R(x) = 0$$

$$P(x) = x(x+1).$$

Dovrebbe essere loro chiara, quindi, la stretta interdipendenza tra prodotto e quoziente. La didattica insegna, però, come la capacità di replicare correttamente formule e procedure di calcolo, non sia di per sé garanzia di una reale acquisizione di conoscenza.
Accodare all’algoritmo di Ruffini una scrittura del tipo visto sopra può essere, allora, un semplice atto dovuto all’insegnante (ancora per *contratto*), o una convenzione accettata altrettanto passivamente che il fatto di dover scrivere il termine noto dopo la seconda barra verticale dell’algoritmo, in una visione dell’algebra che non disdegna l’eventualità di dover maneggiare simboli di cui ci sfugga completamente il significato (Bazzini, 2001).
Naturalmente non è questa l’unica interpretazione del fenomeno, sul quale tornerò più avanti.
D’altra parte, dall’imbarazzo della ragazza, cominciavo io stessa a rendermi conto di quanto poco spontaneo fosse quello che in un primo tempo avevo ingenuamente ritenuto essere un accostamento naturale di concetti.
In effetti, quello che inizialmente sembrava essere un semplice *esercizio* di verifica di procedure già apprese, agli occhi di Sonia si stava trasformando in un vero e proprio *problema*. Credo, infatti, di non forzare troppo l’uso del termine, usualmente destinato a denotare quesiti che coinvolgano regole

[14] Vedi paragrafo 2.3.6

e procedure non ancora incluse nel bagaglio cognitivo del risolutore, se accettiamo quanto affermato in D'Amore (1999):

"*Non è il testo in sé a costituire un esercizio o un problema, ma un complesso legato a situazioni didattiche, capacità individuali e mille altri fattori, tra i quali l'intenzione didattica del proponente ed il livello scolastico*".

Ho cercato, comunque, di far fronte al disorientamento di Sonia, suggerendo qualche chiave di riflessione in più, e tentando contemporaneamente di coinvolgere il resto della classe in quello che cominciava a diventare un enigma stimolante.

"*Se scrivo* $15 = 3 \cdot 5$*, posso concludere che il resto della divisione di* 15 *per* 3 *è* 0*?*"

"*Sì… ok!… Perché* 3 *è un divisore di* 15*… E allora anche* $x+1$ *è un divisore di* $x^2 + x$*!* "

Sonia aveva finalmente riallacciato il legame tra fattore moltiplicativo e divisore ed appariva palesemente sollevata.

Le sue difficoltà avevano però suscitato il mio interesse, anche perché nel tentare di coinvolgere i suoi compagni mi era sembrato che il problema non riguardasse soltanto lei. Sono quindi tornata a proporre il quesito, in vesti sempre diverse, in altre occasioni.

L'esercizio 1 della Scheda A (Allegato 3), proposto in occasione di un lavoro di gruppo, se da un lato presentava, rispetto alla domanda rivolta a Sonia, la difficoltà aggiuntiva di un testo poco accessibile (per molti ha costituito un *ostacolo* il fatto che la consegna richiedesse una *dimostrazione*), dall'altro aveva il vantaggio di richiamare alla mente fattorizzazioni più familiari, quelle tra numeri interi. Una volta riconosciuta nel polinomio assegnato una differenza di quadrati, infatti, ed accertata la presenza del fattore 4 nel prodotto ad essa equivalente, i ragazzi non hanno avuto difficoltà a dedurre la divisibilità richiesta dal testo.

Nell'esercizio 3 della Scheda di riepilogo sulla fattorizzazione di polinomi (Allegato 5), sono poi tornata a proporre il quesito in una forma più vicina a quella dell'interrogazione di Sonia. Trattandosi di una prova scritta, di per sé meno adatta a valutare i *processi mentali* messi in atto dagli studenti (Fandiño Pinilla, 2002), ho cercato di strutturare l'esercizio in più domande, che mi permettessero di comprendere il ragionamento seguito e, nel contempo, di guidarlo verso il mio obiettivo.

I risultati del test sono stati, a questo riguardo, piuttosto deludenti: pur avendo eseguito correttamente la fattorizzazione richiesta nel punto 1, in pochissimi (e Sonia era fra questi), hanno fornito la risposta attesa; quasi tutti si sono limitati ad applicare il teorema del resto, suggerendo come strade alternative, ma "*più lunghe*", la divisione tra polinomi e l'algoritmo di Ruffini.

Ritengo che anche quest'ultimo passo meriti un commento: il confronto dei risultati registrati nelle due prove appena descritte può, infatti, destare sorpresa.

In parte, credo, la forte discrepanza nelle reazioni degli studenti si spiega col fatto che si tratta di verifiche tra loro eterogenee (un lavoro di gruppo, al cui completamento concorrono le idee di molti e per di più condotto sotto la supervisione e il supporto dell'insegnante, e un lavoro individuale, assegnato per casa in preparazione alla verifica scritta e, per mia esplicita dichiarazione, senza voto). I risultati tradiscono, però, anche l'effetto di quanto evidenziato in Malara (1997): il passaggio, troppo spesso sottostimato dalla pratica didattica, dal calcolo aritmetico al trattamento di simbolismi algebrici non è spontaneo, negli studenti, così come, più in generale, non è spontaneo quel processo di *transfer cognitivo* che consiste nel trasferimento, da un contesto di apprendimento ad un altro, di capacità cognitive e procedurali acquisite nel primo dei due ambiti (D'Amore, 1999).

Tornando alla cronaca dei fatti, comunque, dedicherò qualche osservazione anche all'esercizio 2 della prima verifica sommativa (Allegato 6), che cronologicamente ha seguito le due prove precedentemente descritte.

La formulazione del testo era, in questo caso, volutamente più libera. Non era quindi mia pretesa che ci si rifacesse necessariamente alla fattorizzazione del polinomio assegnato, in questo caso non richiesta espressamente.

Nonostante questo, qualcuno in più, rispetto al test appena preso in esame, ha percorso la strada senz'altro più breve della fattorizzazione in termini irriducibili. Nella lezione che aveva preceduto il compito, avevo dedicato qualche minuto al commento della scheda assegnata a casa e sembrava che la cosa avesse avuto il suo effetto.

E’ però significativo il caso di chi, dopo aver riscritto il polinomio sotto forma di prodotto, forse soltanto in accordo ad una clausola della *contratto didattico* che prevede di adeguarsi alle attese dell’insegnante, a prescindere da quali siano le richieste del testo (e cito ancora D’Amore (1999) per una panoramica interessante su casi di problemi risolti, senza che questi contenessero una domanda esplicita), ha comunque proceduto ignorando l’espressione ottenuta ed affidandosi a più collaudati criteri di divisibilità.

Le difficoltà degli studenti a leggere nella scrittura $x^2 + x = x(x+1)$ una conferma della divisibilità di $x^2 + x$ per $x+1$, possono anche dipendere dal *modello* di divisione che negli anni si è consolidato in ciascuno di essi, modello che può essere diverso da ragazzo a ragazzo in funzione dell’insegnamento ricevuto e più in generale di tutta l’esperienza pregressa. D’Amore (1999) parla ad esempio, facendo riferimento al caso numerico, di *divisione per ripartizione* o *per contenenza*, due interpretazioni distinte dello stesso oggetto matematico, che possono dar luogo al consolidarsi di modelli diversi.

Alle luce di quanto detto, propongo allora qualche riflessione di carattere strategico-metodologico.

- In accordo con quanto sostenuto in D’Amore (1999) è opportuno tener conto, in una buona didattica, del fatto che “*Ciascuno studente fa più fatica ad interpretare alcune rappresentazioni e meno fatica ad accettarne altre*” ed adottare di conseguenza scelte strategiche che mirino ad adeguarsi ai diversi *stili cognitivi*, introducendo ugualmente tutti i registri ed invitando a far pratica di traduzioni dall’uno all’altro.
- E’ bene essere consapevoli di quanto non sia spontaneo l’accostamento di concetti tra loro interdipendenti, per impostare un’attività didattica che non presenti i contenuti curricolari come un elenco di argomenti tra loro sconnessi, ma, al contrario, sia orientata a mettere in luce gli elementi di contatto tra l’uno e l’altro oggetto di studio. Nel caso specifico, per evitare che fattorizzabilità e divisibilità vengano visti come concetti indipendenti, in accordo con Vergnaud (1990), è opportuno adottare un approccio strutturale, che

permetta di calare l'oggetto "fattore", così come l'oggetto "divisore" e tutti gli enti che con essi interagiscono, all'interno di un unico *campo concettuale*: quello delle strutture moltiplicative.

- Un avvicendamento tra docenti può rappresentare, per gli studenti, un *ostacolo* alla costruzione di una visione globale del sapere appreso, sia perché la continuità didattica ne risulta inevitabilmente penalizzata, sia perché l'ingresso di un nuovo insegnante produce una *rottura di contratto* che autorizza la classe a mettere tra parentesi quanto visto prima del suo arrivo. Mi auguro che i miei tentativi di riallacciare i fili di collegamento tra i contenuti del percorso da me proposto e le conoscenze pregresse, siano serviti a minimizzare effetti di questo tipo.

2.3 Alcune delle altre criticità registrate e relativi protocolli

2.3.1 Dimostrare per ogni n… o almeno per parecchi!

Durante un lavoro di gruppo ho posto alla classe quesiti del tipo:
Dimostrare che il valore assunto dai seguenti polinomi per ogni n naturale, è un numero pari: $n^3 - n^2$; $n^3 + 2n^2 + n$; $n^4 - n^3 + n^2 - n$ (Allegato 4, esercizio 1).
Passando tra i banchi ho avuto modo di notare un certo disorientamento nell'affrontare questo genere di problemi, tanto che io stessa ho suggerito di dedicare qualche minuto alla "fase esplorativa", operando delle sostituzioni numeriche, che aiutassero a dare senso alla consegna richiesta.
L'effetto suscitato, in uno dei gruppi, è stato il seguente:
"Professoressa, noi l'esercizio 1 l'abbiamo dimostrato provando a sostituire tutte le n."
"Vuoi dire che avete operato tutte le sostituzioni possibili, da 1 ad infinito?"
Stupore e disappunto sui volti dei ragazzi e poi:
"Tutte proprio no, ma ne abbiamo fatte parecchie e funziona sempre!"

E’ evidente che per questi studenti il concetto di *dimostrazione* è ancora molto immaturo[15]. Per loro, “dimostrare” ha come unico obiettivo il convincimento di altri o di se stessi, sulla base di criteri di evidenza o di accettabilità che poco hanno di oggettivo: qualcosa, questa, che si avvicina molto più all’idea di *argomentazione*, in linea con gli schemi delle pratiche discorsive spontanee, che non a quella di *dimostrazione*, mirante alla “*modificazione del valore epistemico di un enunciato-bersaglio e [alla] determinazione del suo valore di verità*” (Duval, 1996).
Nei loro ragionamenti non c’è traccia del rigore con cui viene condotta una deduzione logica, così come nel loro linguaggio, ancora saldamente ancorato al linguaggio naturale, persistono alcuni “quantificatori” non ben determinati (e.g. il “parecchi” del caso in esame) ed espressioni qualitative, che hanno la pretesa di descrivere e definire entità matematiche. Ne è un esempio la risposta di Edoardo al quesito 4 del Test iniziale (Allegato 2):
“*L’insieme dei multipli di 6 è in gran parte formato dai multipli di 2 e di 3*”, o quella, non meno colloquiale, oltre che evidentemente errata, di Isabella:
“*I multipli di 6 sono tutti i multipli di 2 e, in alcuni casi, i multipli di 3*”.

2.3.2 Il “Principio di sovrapposizione dei contratti didattici”

In occasione del compito in classe sulla fattorizzazione di polinomi, ho proposto agli studenti il seguente problema:
Dimostrare che $P(x) = x^2 + x + 1$ *non è fattorizzabile nel prodotto di due polinomi a coefficienti razionali* (Allegato 6).
In classe avevamo parlato della fattorizzazione mediante il teorema del resto e la regola di Ruffini, mettendo bene in luce come gli unici possibili zeri di un polinomio a coefficienti interi, in cui il termine di grado massimo abbia un coefficiente unitario, siano da ricercare tra i divisori del termine noto.
Il fatto che né $+1$ né -1 siano zeri di $P(x)$, assieme alla considerazione che $P(x)$ ha grado 2, e quindi non può che essere fattorizzato (a meno di casi

[15] Per inciso, nella pratica scolastica l’idea di dimostrazione è quasi totalmente estranea ai curricoli di algebra, e trova invece piena collocazione in quelli di geometria.

banali) nel prodotto di polinomi di primo grado, avrebbe dovuto portarli a dedurre l'irriducibilità di $P(x)$.

Naturalmente un esempio simile era già stato trattato alla lavagna, in fase di spiegazione.

Il polinomio *P(x)*, però, era stato oggetto d'esame anche nel corso di una lezione della professoressa Batacchi, che lo aveva presentato alla classe come un "falso quadrato", mostrando come $x^2 + x + 1$, per quanto ricordi il quadrato di un binomio, non può essere scritto come $(x+1)^2$.

Quella che riporto qui fedelmente è la dimostrazione fornita da Federica, nella sua verifica scritta:

"*Si prova con Ruffini, cercando lo zero tra* ± 1*:*

$P(+1) = 1 + 1 + 1 = 3$*;*

$P(-1) = 1 - 1 + 1 = 1$.

Il polinomio non può essere scomposto con Ruffini ed è irriducibile, perché è un falso quadrato".

In fondo sarebbe sufficiente qualche *piccola* correzione sintattica nell'ultima proposizione, perché la dimostrazione possa essere considerata corretta:

"Il polinomio non può essere scomposto con Ruffini e quindi è irriducibile. Osservo poi, incidentalmente, che P(x) è un esempio di falso quadrato".

Ma a Federica sembra una questione di sfumature, tanto che il giorno della consegna del compito, dopo la correzione collettiva alla lavagna dell'esercizio, Federica rivendica la sua versione:

"*Professoressa, è quello che ho scritto io: il polinomio non può essere scomposto con Ruffini ed è irriducibile, perché è un falso quadrato!*"

Questo semplice episodio denuncia, ancora una volta, come non sia mediamente ancora maturo, a questo livello, il concetto di dimostrazione e come i tentativi di emulare l'atteggiamento linguistico dell'insegnante spesso nascondano un'esplicita rinuncia al *senso* di quanto si scrive, come nell'esempio, documentato da D'Amore (1999), di definizioni di parallelogrammo, tenacemente difese dagli studenti, del tipo:

"*Un quadrilatero è detto parallelogrammo quando ha i lati a due a due*".

Nel caso specifico, poi, il flusso argomentativo si risolve in un affiancamento acritico e non strutturato di affermazioni logicamente scollegate, il cui scopo è anche, e soprattutto, quello di compiacere l'una e l'altra professoressa, fenomeno che, con un briciolo di ironia, battezzerei come "Principio di sovrapposizione dei contratti didattici".

2.3.3 L'imbarazzo degli elementi neutri e la loro "intercambiabilità"

Mi è capitato più volte, nel corso dell'esperienza di tirocinio, di percepire nei ragazzi un particolare imbarazzo di fronte al trattamento degli elementi neutri. Pur non essendo spesso consapevoli del ruolo particolare che il numero zero e il numero uno ricoprono nella somma e, rispettivamente, nel prodotto, essi sembrano effettivamente riservare loro un *trattamento preferenziale*.

Ecco allora che un banale esercizio di raccoglimento, come $(x+1)x-(x+1)y$, risolto senza indecisioni nella scrittura equivalente $(x+1)(x-y)$, si complica incredibilmente quando si scelga di sostituire la x del primo termine con un coefficiente unitario, $(x+1)-(x+1)y$, dando luogo ad espressioni come $(x+1)(-y)$ nella quale il fattore 1 del primo termine lascia il posto ad uno 0, ritenuto più idoneo a simboleggiare il fatto che, raccolto $(x+1)$, come mi ha detto un ragazzo, "*non rimane più niente*".

Casi analoghi, di confusione degli elementi neutri, si manifestano, più o meno nella stessa forma, in contesti diversi.

Trattando con frazioni algebriche, ad esempio, $\frac{x+1}{x+1}$ viene spesso riconosciuta come equivalente a 0 piuttosto che ad 1, o, ancora, quando si chieda di completare con i "termini mancanti" la scrittura di un polinomio di grado n in una variabile, per eseguire la divisione tra polinomi, può succedere che i termini richiesti vengano inseriti con un coefficiente 1.

Il fenomeno, cui mi sono accostata con una certa curiosità, risente indubbiamente delle insidie nascoste nelle *interferenze tra linguaggio matematico e lingua comune* (Maier, 1989), ma va anche letto, a mio parere, in questa chiave: i ragazzi, troppo abituati a identificare l'algebra con una collezione di trucchi ed artifici di calcolo volti a risolvere il problema di volta in volta presentato, mancano di una visione strutturale della disciplina (Sfard, 1991), che tra l'altro li aiuterebbe a collocare al giusto posto, e in relazione ad operazioni differenti, i due elementi neutri, e a dare il peso che meritano alle proprietà sottese dalle regole utilizzate (Mariotti, Cerulli, 2003).

2.3.4 Le proprietà: un argomento di teoria

L'importanza delle proprietà, cui accennavo nel precedente paragrafo, e il loro valore di elementi fondanti, nella costruzione di una teoria, non è in effetti percepita da buona parte dei ragazzi.

Se interrogati, molti di loro mostrano di conoscere bene le proprietà cui si è fatto riferimento nel corso delle nostre lezioni. L'impressione che spesso si ricava, però, è che lo ritengano un semplice argomento di teoria, non funzionale allo svolgimento degli esercizi assegnati, e in quanto tale fine a se stesso, o all'ottenimento di un buon voto all'orale.

Pur enunciando correttamente la *proprietà invariantiva*, quindi, spesso non ne riconoscono una sua applicazione nel processo di semplificazione di una frazione algebrica, o nella riduzione di due o più frazioni a denominatore comune.

Semplificare sembra avere, per loro, il semplice significato di "cancellare" i termini comuni a numeratore e denominatore, con l'effetto che vengano riconosciute legittime equivalenze di questo tipo: $\frac{2x-5}{2x+3}=\frac{-5}{3}$.

Significativo, a tale riguardo, è il fatto che nel test iniziale, proposto alla classe per la valutazione dei prerequisiti, in pochi avessero scelto come corretta, nell'esercizio 3 l'opzione *c* (Allegato 2), molto simile all'uguaglianza appena trattata. La cosa, se da un lato si spiega con la considerazione, ampiamente documentata in letteratura (Malara, 1997) che il passaggio all'algebra comporta inevitabilmente uno scollamento dal significato e produce una perdita di controllo sulla legittimità delle trasformazioni eseguite, dall'altro, forse meno nobilmente, trova la sua giustificazione nel fatto che molti dei ragazzi, prediligendo un approccio marcatamente operativo, abbiano risolto l'esercizio, calcolatrice alla mano, mettendo semplicemente a confronto i risultati numerici ottenuti a destra e a sinistra dell'uguaglianza.

Tale comportamento, del resto, è perfettamente in accordo con i risultati registrati da Mariotti, Cerulli (2003), in una classe alle prese con i primi elementi del calcolo letterale.

Quanto alla riduzione a denominatore comune di due o più frazioni algebriche, cui accennavo poco sopra, il discorso è analogo: la procedura seguita, più che un'efficace applicazione della proprietà invariantiva, non è vista che come l'esecuzione meccanica di una ricetta di calcolo, peraltro piuttosto articolata.

Osservo qui, incidentalmente, che le difficoltà riscontrate nella riduzione a denominatore comune, nel trattamento delle frazioni algebriche, sono state superiori alle aspettative. In questo, come in altri casi, il ricorso alle analogie con esempi numerici sembra non essere sufficiente a colmare il vuoto di senso che molti degli errori dei ragazzi spesso denunciano. Se, infatti, ancora una volta, l'introduzione di nuovi simbolismi e il passaggio al trattamento letterale provocano quella rottura rispetto al calcolo aritmetico cui ho più volte accennato, con conseguente caduta di senso (Malara, 1997), tanti errori sembrano nascondere, già a monte, un apprendimento mnemonico e non ragionato di concetti aritmetici che dovrebbero in questa fase fungere da base per la costruzione di nuova conoscenza (nel caso specifico: denominatore comune tra frazioni numeriche).

Tornando al riconoscimento e all'applicazione consapevole di proprietà, ho spesso assistito ad usi impropri di proprietà valide in tutt'altro contesto. La proprietà diventa, in questi casi, uno strumento invocato al bisogno, a legittimazione di un processo di calcolo. L'equivalenza tra frazioni algebriche scritta sopra, ad esempio, diviene corretta in virtù del fatto che, come ha timidamente osservato Elena dal posto, rifacendosi ad una proprietà delle uguaglianze: "*sommando e sottraendo una stessa quantità ai due termini della frazione, il risultato non cambia*".

2.3.5 L'autorità della regola: dibattito sul segno meno

Nel semplificare una frazione algebrica del tipo $\frac{a-1}{1-a}$, mi è capitato di scrivere alla lavagna, senza commentare: $\frac{a-1}{1-a}=-\frac{1-a}{1-a}$.

Nel brusio generale, Giulia è intervenuta dal posto, sostenuta dall'approvazione di tanti compagni con la mano alzata: "*Professoressa, ma quel segno meno va a numeratore. Se lo mette davanti al segno di frazione è diverso!*[16]"

"*E perché è diverso?*", chiedo incuriosita.

Risponde Annalisa, sua compagna di banco, con cui Giulia si è consultata dubbiosa prima di intervenire: "*Perché davanti al segno di frazione vale per tutta la frazione.*"

"*Siete tutti convinti di questo?*"

Buona parte della classe risponde di sì.

"*E cosa vuol dire che vale per tutta la frazione?*"

Questa volta è Valeria, a parlare: "*Che influisce sia sul numeratore che sul denominatore… e quindi diventa più!*"

Il gioco comincia ad interessarmi. C'è un gruppo compatto che non è disposto a cedere e il fatto che io non prenda una posizione decisa li incoraggia a dire la loro.

"*Allora non posso scrivere* $-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$ *?*"

Tutta la classe: "*Nooooooo!*"

"Proviamo con un esempio numerico. Scrivere $-\frac{6}{2}$ o $\frac{-6}{2}$ o $\frac{6}{-2}$ non è la stessa cosa?"

Riflettono e poi rispondono: "*Sì.*"

Ma Giulia è ancora perplessa. E non è la sola.

---

[16] Si tratta di una delle tante manifestazioni di una difficoltà più generale, nel riconoscere l'equivalenza tra due distinte scritture. Rientrano nella stessa famiglia le uguaglianze $a\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}$ o $\frac{x}{a}=\frac{1}{a}x$.

Elena, che fin dall'inizio si era mostrata d'accordo con le altre, continua a protestare: "*Io l'esempio numerico l'ho capito, ma con le lettere è diverso!*"
Sembra proprio che, in questo caso, anche il ricorso alla *particolarizzazione*[17] (Malara, 1997) non sia sufficiente a convincerli. Verso le lettere sembra esserci una "diffidenza" diffusa, difficile da affrontare.
Ma la cosa sorprendente è che l'acceso dibattito si placa immediatamente, dopo l'intervento della mia tutor, che non fa altro che invocare, a giustificazione di questo "fenomeno" una regola che tutti ricordano di aver annotato in passato, sui loro appunti.
"*Ragazzi, se ho* $\frac{a-1}{1-a}$*, non faccio altro che cambiare di segno il numeratore e mettere un meno davanti alla frazione. E' la regola del cambio del segno!*"
L'insegnante si prepara a giustificare quanto ha appena affermato, ma la classe è già convinta!
Cos'è successo? Dubito che gi scettici abbiano improvvisamente compreso il perché dell'uguaglianza delle due scritture. Semplicemente, come spesso succede, ogni ricerca di senso si è spenta, di fronte all'autorità della regola.
E' un caso, questo, che credo si inquadri, a buon diritto, sotto la voce del *contratto didattico*, e più specificamente della clausola di *delega formale*. Di fronte alla proclamata certezza di una regola che non suona nuova, infatti, nessuno si sente più autorizzato a dubitare e anche nei più tenaci il controllo razionale cede il posto all'accettazione acritica ed al disimpegno delle facoltà mentali (D'Amore, 1999).

2.3.6 Uso improprio delle notazioni

Nel corso dei due mesi che mi hanno visto impegnata nell'esperienza didattica qui descritta, ho avuto modo di raccogliere, sia dalle interrogazioni alla lavagna, sia dalle prove scritte, un'interessante collezione di esempi riguardanti l'uso errato di simboli e notazioni.

---

[17] Attività di rilettura in chiave "particolare" di un'espressione a carattere più generale, il cui scopo sarebbe, secondo Malara (1997), quello di "*indurre negli allievi il controllo della correttezza delle trasformazioni effettuate*".

Ne riporto solo qualcuno. Si tratta di una raccolta di quanto emerso dalla correzione dei compiti di tutti gli allievi, relativamente all'applicazione del teorema del resto, nell'esercizio 2 della prima verifica sommativa (Allegato 6).

Nel calcolare il polinomio per il valore $x = -1$, alcuni ragazzi scrivono:

$P(x) = P(-1) = 1 + 27 - 1 - 27 = 0$ oppure

$P(x) = \pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 27$

uguagliando in questo modo la generica espressione del polinomio ad un'indeterminata, al valore assunto dal polinomio stesso per un determinato valore della x o, rispettivamente, alla lista degli unici eventuali zeri di $P(x)$.

Forse nell'intento di rendere il fatto che gli zeri in questione vengono ricercati tra i divisori del termine noto, uno di loro scrive anche:

$27 = \pm 1; \pm 3; \pm 9; \pm 27$

dove 27 rappresenta, appunto, il termine noto.

Il simbolo di uguaglianza, infine, viene sfruttato, in una delle prove, in modo ancora più originale:

$P(-1) = 1 + 27 - 1 - 27 = Si$

$P(+1) = 1 - 27 + 1 - 27 = No$

dove *Si* e *No* renderebbero, in questo caso, il fatto che il divisore del termine noto di volta in volta assegnato come valore alla x, sia o meno una radice del polinomio dato.

Mi limito a questi esempi, perché ritengono siano già sufficienti ad osservare almeno due cose:

- Scritture di questo tipo, per quanto fantasiose, manifestano il chiaro intento, da parte dei ragazzi, di cimentarsi nell'uso di un linguaggio formale, di cui cominciano a percepire l'importanza, pur non riuscendo ancora a servirsene propriamente. Se, però, da un lato, c'è la volontà di adeguarsi al rigore di uno stile espressivo nuovo, nella comunicazione scritta, così come in quella orale, dall'altro è palese, nei loro ingenui tentativi, la mancata comprensione del significato di quanto scrivono. Ne deriva un linguaggio, che D'Amore, con chiara connotazione negativa, chiama *matematichese* (D'Amore, 1999) che risente da una parte dell'influenza del *contratto didattico* e dall'erronea interpretazione delle aspettative dell'insegnante (io, nel caso specifico); dall'altra, di suggestioni della lingua naturale, nonché, aggiungerei, di quella, non meno praticata, della comunicazione via brevi messaggi testuali.

- Quelli che potrebbero essere classificati come errori di secondo piano, nascondono, a ben guardare, la prova della mancata acquisizione di concetti importanti. Uguagliare ad esempio $P(x)$ a $P(-1)$, vuol dire non aver compreso il diverso ruolo giocato dall'indeterminata e da uno dei suoi possibili valori. Ne è una dimostrazione il fatto che, quando in fase di correzione del compito ho chiesto alla classe di commentare tale equivalenza, in pochi abbiano saputo spiegare la differenza concettuale tra l'una e l'altra espressione messe a confronto. Si ricade, allora, ancora una volta, nel pericoloso *modello* di un'algebra vista come vuoto trattamento di simboli senza significato (Malara, 1997), con conseguente crollo del controllo razionale e, aspetto non meno grave, del coinvolgimento personale motivato.

CAPITOLO 3
VALUTAZIONE

3.1 Valutazione: le sue distinte accezioni

Sotto un'accezione meno restrittiva di quella diffusa nel senso comune, il termine valutazione, in pedagogia, ha a che fare non solo con la misura del profitto dello studente, ma anche con il ritorno informativo sull'efficacia dell'azione didattica (Fandiño Pinilla, 2002). Nel seguito terrò pertanto distinti i due aspetti, proponendo anche, nell'ultimo paragrafo, una sorta di bilancio conclusivo sulla mia esperienza formativa presso la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario.

3.2 Gli strumenti di valutazione adottati

Con attenzione alle due distinte accezione del termine appena citate, mi sono servita di un insieme piuttosto vasto e differenziato di strumenti di valutazione, al fine di garantirmi una collezione di informazioni che fosse il più possibile significativa. Sono quindi passata dalle tradizionali verifiche scritte (Allegati 2, 6 e 7), alla tecnica del "cooperative learning" (Allegati 3 e 4), dalla sollecitazione di interventi dal posto, alle interrogazioni alla lavagna, dalla redazione di una prova informale, da svolgere a casa (Allegato 5), alle frequenti provocazioni a-didattiche. Ho ritenuto utile, inoltre, raccogliere anche una serie di dati valorativi attraverso, ad esempio, la tecnica degli *informes* (vedi paragrafo 2.1.5). Il medesimo scopo ha avuto l'introduzione, nei lavori di gruppo, di una figura di mia invenzione, quella del "verbalizzatore", incaricato di redigere, in un linguaggio informale, un diario commentato dell'esperienza di problem solving (una sorta di TEP[18]), da cui sono emerse informazioni preziose sui processi di reinterpretazione messi in atto dagli studenti a fronte di un'osservazione, un suggerimento o un consiglio dati dall'insegnante.

[18] Letteralmente: produzione testuale autonoma degli allievi. "Si considerano TEPs quelle produzioni nelle quali lo studente, messo nelle condizioni di volersi esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee." (D'Amore, Maier, 2002). Anche i protocolli commentati di problem solving rientrano dunque sotto questa classificazione.

Interessante, a questo proposito, l'annotazione di Erica sul suo verbale di gruppo: "*La prof. suggerisce: - Quando si dimostra in matematica, se si riesce a individuare l'esempio che non va, in generale è meglio. -*". Tale annotazione aveva la pretesa di "tradurre" l'avvertenza, che riporto testualmente, "*Un esempio può fungere da dimostrazione solo nel caso in cui si tratti di un controesempio*", che avevo dato loro al vedere che avevano intrapreso la dimostrazione di una legge valida per ogni intero *n*, facendo appello a casi numerici particolari per cui l'enunciato era verificato.

3.3 Valutazione del profitto

Riguardo al primo dei due scopi, quello della misura del profitto degli studenti, la strategia seguita è stata quella di ideare prove che consentissero, in primo luogo, l'accertamento degli obiettivi dichiarati già in fase di stesura del progetto di tirocinio (Allegato 1). Dal momento che parte integrante di tali obiettivi era rappresentata dal conseguimento di competenze ben più avanzate delle semplici abilità di calcolo, ho cercato di proporre quesiti (o problemi) che mettessero in luce, accanto a capacità procedurali, anche l'effettiva acquisizione di tali competenze.
In linea con un'idea di valutazione attenta al *processo*, più che al *prodotto* (Fandiño Pinilla, 2002), nel momento di tradurre in giudizio l'analisi delle prestazioni degli studenti, ho poi dato più peso a "performance" che mostrassero l'attivazione di processi mentali corretti, per quanto portassero a risultati errati, che non a risposte impeccabili dettate dall'acquisizione mnemonica di procedure di calcolo non comprese. E, sempre in quest'ottica ho riservato un giudizio migliore per Alessandro, che nel corso di un'interrogazione, non ricordando la formula generale per la riduzione dei già nominati "trinomi notevoli", ha ricavato la "regola" alla lavagna, che non per Francesca, che dopo aver eseguito senza esitazioni il cubo di un binomio, non ha saputo chiarire il senso di ciò che avesse fatto.
Durante tutto il percorso, ho lavorato sul fronte *formativo* della valutazione, non meno che su quello *sommativo*, cercando di trasmettere sempre, a commento di una prestazione, l'idea di cosa sia davvero importante nel

processo di risoluzione di un problema matematico (anche se, inevitabilmente, la cosa ha in sé molto di soggettivo).

3.3.1 Le prove scritte

Nel corso dell'intervento ho previsto tre prove scritte, la prima delle quali, proposta all'inizio del percorso, con evidenti finalità diagnostiche, mirava all'accertamento dei prerequisiti elencati nel progetto di tirocinio.
La seconda e la terza prova, a carattere di verifiche sommative, hanno avuto la funzione di misurare il livello di apprendimento conseguito, relativamente ai temi della fattorizzazione tra polinomi e del trattamento di frazioni algebriche.
L'attenzione già dichiarata al processo, più che al prodotto, si è tradotta, in concreto, nell'assegnare un punteggio a ciascuno dei passi nel processo risolutivo di ogni esercizio (o problema).
Per curare anche l'aspetto formativo della valutazione delle prove, inoltre, ho dedicato un'ora di lezione dopo ogni verifica, allo svolgimento alla lavagna dei quesiti e al commento delle correzioni da me effettuate.
Ho infine ritenuto opportuno premiare i percorsi migliorativi rintracciati fra le *performance* degli studenti, sia sfruttando il sempre presente margine di flessibilità nelle griglie di attribuzione dei punteggi, sia incoraggiando verbalmente gli allievi effettivamente migliorati, perché continuassero lungo il percorso intrapreso.

3.4 Valutazione dell'esperienza didattica svolta

Le produzioni scritte ed orali realizzate dagli studenti nel corso dell'intervento didattico, se da una parte mi hanno fornito informazioni preziose per la misurazione del profitto dei singoli studenti, dall'altra, indirettamente, offrono ora molteplici spunti di riflessione, nella direzione di una più fondata valutazione dell'intera esperienza didattica.
Seguendo, ad esempio, una traccia già percorsa nel secondo capitolo, l'analisi dei risultati registrati nell'intera sequenza delle prove lascia emergere come l'accostamento tra "fattore moltiplicativo" e "quoziente" nell'ambito del trattamento di polinomi (vedi paragrafo 2.2) , inizialmente

tutt'altro che spontaneo, sia gradualmente maturato nel tempo. Di più: rimanendo su questo esempio, è interessante osservare come il semplice esame dei risultati sia in grado di suggerire importanti considerazioni sulla diversa efficacia dei momenti che hanno segnato l'evoluzione di tale situazione.

La discussione costruita attorno alle difficoltà di Sonia, alla lavagna, ad esempio, non ha avuto effetto che sull'interrogata, per quanto avessi cercato di coinvolgere nel problema l'intera classe. Questo comportamento è del resto facilmente spiegato dall'abitudine, radicata negli studenti ed inquadrabile come clausola implicita del contratto didattico, a considerare l'interrogazione un semplice fatto privato.

Più efficace, in termini di apprendimento, almeno a giudicare dai risultati delle prove successive, è stata la correzione alla lavagna della Scheda assegnata per casa (Allegato 5), forse anche grazie alla mia esplicita avvertenza che lo stesso problema si sarebbe potuto presentare nuovamente, durante un compito in classe.

In termini più generali, l'esperienza d'aula ha confermato come efficaci molte delle attività sperimentate lungo il percorso: prima fra tutte il "gioco" del cooperative-learning, cui i ragazzi si sono prestati da subito con grande entusiasmo.

Quel che è emerso dalla messa in atto di questa attività, più di altre, è stato lo stretto legame che inevitabilmente si allaccia tra aspetti motivazionali e risultati in termini di apprendimento. E' questo, a mio parere, un punto che merita un'attenta riflessione, al fine di operare scelte strategico-metodologiche sempre più consapevoli, miranti, *in primis*, ad obiettivi di efficacia didattica, ma attente, nel contempo, a mantenere sempre viva negli studenti quella curiosità innata, che è tra i più preziosi patrimoni del genere umano e tra i più forti stimoli alla conoscenza.

3.5 Valutazione del percorso di specializzazione seguito

A conclusione di un'esperienza formativa che mi ha tenuto impegnata per due anni, presso la Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, trovo opportuno esprimere qualche considerazione personale sul percorso di crescita culturale e professionale proposto dalla scuola, e sul riflesso che tale esperienza ha inevitabilmente prodotto sulle mie concezioni matematiche, sui miei personali modelli mentali, sul mio spirito critico, nonché sulla mia precedente idea dell'*insegnare matematica*.

Ritengo in proposito che uno dei grossi meriti della S.S.I.S., sia non tanto quello di agire, modificandolo, sul modo di vedere la disciplina in sé, quanto piuttosto quello di richiamare l'attenzione sul significato dell'azione didattica, vista, con un decentramento del "fuoco" sui destinatari di tale azione, non come mero "travaso di sapere", quanto piuttosto come un processo di costruzione di conoscenza nel quale gli studenti giocano il ruolo di "primi attori". In quest'ottica, accanto ad obiettivi di aderenza alla teoria matematica sottesa dai temi proposti in un curricolo scolastico, diventa primaria, nella deontologia di un buon docente, un'attenzione costante ai segnali raccolti dalla classe nelle situazioni d'aula, oltre che una buona conoscenza dei processi cognitivi implicati nel percorso di apprendimento.

Quanto ai miei modelli mentali e, in generale, alla mia personale visione della matematica, la scuola di specializzazione ha indubbiamente favorito un auto-esame in questa direzione, rendendomi così più consapevole di quello che è il mio modo di vedere la disciplina. Inoltre, fornendo le chiavi di lettura di punti di vista alternativi, essa mi ha senz'altro permesso di "relativizzare" le mie concezioni personali e di rileggerle criticamente come solo una delle possibili visione epistemologiche della matematica. L'effetto immediato, sul piano didattico, è stato quello di suscitare una mia maggiore attenzione, anche nel modo impostare le lezioni, ai diversi punti di vista e ai differenti stili cognitivi presenti in aula.

Direi, infine, che i corsi teorici previsti dalla scuola, nonché l'attività di tirocinio, sostenuta e supportata dall'esperienza e dalla competenza professionale di tutor e supervisore, hanno contribuito ad affinare capacità diagnostiche e di intervento, a fronte di quanto emerge nella pratica didattica.

CONCLUSIONI

A conclusione di questo lavoro, mi limito a citare una frase del celebre matematico ungherese George Polya, ripresa da D’Amore (1999), che ben si accorda con lo spirito con cui ho affrontato l’esperienza di tirocinio, che mi auguro continui ad animare il mio futuro professionale:
“*Un insegnante di matematica ha una grande possibilità. Ovviamente, se egli impiegherà le sue ore di lezione a far eseguire dei calcoli ai suoi studenti, finirà per soffocare il loro interesse, arrestare il loro sviluppo mentale e sciupare l’opportunità che gli si presenta. Invece, se risveglierà la curiosità degli alunni proponendo problemi di difficoltà proporzionale alle conoscenze della scolaresca e li aiuterà a risolvere le questioni proposte con domande opportune, egli saprà ispirare in loro il gusto di un ragionamento originale*”.
Scelgo queste poche parole come fonte di ispirazione futura e come dichiarazione di responsabilità, una sorta di “giuramento di Ippocrate” cui sin d’ora mi impegno a tener fede nelle scelte didattiche che segneranno il mio percorso lavorativo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Testi, ariticoli e appunti di ricerca

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). *L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Quaderno n. 6 del CNR*. Progetto strategico: Tecnologie e Innovazioni didattiche.

Bazzini L. (2001). Aspetti cognitivi del pensiero algebrico e implicazioni didattiche. *La matematica e la sua didattica*. 4, 314-331.

Baldrighi A., Fattori A., Pesci A (2004). Un'esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore: il teorema di Pitagora. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 2, 126-145.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Maier H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs e loro utilizzazione didattica). *La matematica e la sua didattica*. 2, 144-189.

D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.

Duval R. (1996). Argomentare, dimostrare, spiegare: continuità o rottura cognitiva? *La matematica e la sua didattica*. 2, 130-152.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). Curricolo e valutazione in matematica. Bologna: Pitagora.

Laborde C. (1995). Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*. 2, 121-135.

Maier H. (1989). Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*. 3, 86-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*. 3, 1995, 298-305].

Malara N. A. (1997). Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. *La matematica e la sua didattica*. 2, 176-185.

Mariotti M. A., Cerulli M. (2003). Espressioni numeriche ed espressioni letterali: continuità o rottura? *La matematica e la sua didattica*. 1, 43-63.

Monari F. (2007). *Appunti per le lezioni di Laboratorio di Didattica della Matematica.*

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics*. 22(1), 1-36

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*. 10, 133-169 [Trad. it. di F. Speranza in: *La matematica e la sua didattica*. 1, 1992, 4-19]

Villani V. (2003). *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica (Aritmetica e Algebra).* Bologna: Pitagora.

Documenti istituzionali

Barozzi G. C. (2001). Polinomi e liste. *Quaderno 44: IL PROGETTO LABCLASS - Seminario di formazione per docenti*. Quaderni e Atti pubblicati dal Ministero della Pubblica Istruzione.

Impedovo M., Paola D., Tomasi L., *Documento sui "nuovi curricoli" di matematica per la scuola secondaria elaborato da un gruppo di insegnanti di matematica della scuola secondaria.*

UMI (1999). *SYLLABUS DI MATEMATICA - Conoscenze e capacità per l'accesso all'Università. Suggerimenti dell'Unione Matematica Italiana per la preparazione all'accesso alle Facoltà scientifiche.*

UMI (2003). *Matematica 2003 – Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica*.

UMI (2004). *I Giochi di Archimede – Gara Biennio*. Progetto Olimpiadi di Matematica.

Libri di testo

Cateni L., Bernardi C., Maracchia S. (1983). *Corso di algebra per gli Istituti Tecnici Commerciali*. Le Monnier.

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. (1996). *Nuovo corso di algebra per il biennio delle scuole superiori*. Milano: Ghisetti e Corvi Editori.

Gallo E. (1988). *Fare matematica. Per il biennio delle scuole superiori*. Torino: SEI.

Lazzarini P., Sarnataro G. (1992). *Nuovo IDEE BASE DI MATEMATICA MODERNA*. Milano: Etas libri.

Prodi G. (1980). *Matematica come scoperta*. Messina: Casa Editrice G. D’Anna.

Speranza F., Rossi dell’Acqua A. (1988). *Il linguaggio della matematica*. *Per le Scuole Superiori*. Zanichelli.

ALLEGATO 1

PROGETTO DI TIROCINIO

Finalità dell'insegnamento della matematica

"Meglio una testa ben fatta che una testa ben piena."
Montaigne

Nel corso degli ultimi anni il problema di quali debbano essere le finalità dell'insegnamento della matematica ha acquisito grande attualità, anche alla luce di un fenomeno più globale, che coinvolge quasi tutti i paesi europei tecnologicamente avanzati e a cui l'Italia, fra gli altri, guarda oggi con crescente preoccupazione: la crisi delle vocazioni scientifiche nel quadro di un mercato del lavoro che paradossalmente sembra richiedere un sempre maggior numero di ricercatori e tecnici altamente qualificati.
L'attenzione politica al fenomeno e la forte opera di sensibilizzazione promossa anche in ambito universitario (come testimonia, fra gli altri, il *Progetto Lauree Scientifiche*) deve quanto meno invitare a riflettere su quali siano le radici della disaffezione dei giovani verso la matematica e su cosa la scuola possa concretamente fare per riavvicinare le nuove generazioni alla disciplina.
A spiegare il rapporto troppo spesso conflittuale tra giovani e matematica, è almeno in parte l'immagine, fortemente radicata nel senso comune, di una matematica per pochi eletti.
E' quanto sottolinea il National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), che in una terna di documenti prodotti negli anni tra il 1989 e il 1995 – *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989), *Professional Standards for Teaching Mathematics* (1991) e *Assesment Standards for School Mathematics* (1995) – ha messo in discussione tale idea con l'argomento persuasivo che tutti hanno bisogno di comprendere la matematica (evidenziando peraltro come questa necessità di alfabetizzazione di massa richieda uno sforzo di conciliazione tra criteri di equità, e quindi di diffusione democratica del sapere, e standard di eccellenza, miranti a mantenere alti livelli didattici).

Jean-Pierre Bourguignon, Presidente della Società Matematica Europea nel 2000, così si esprime a tale proposito: *"Molti…* oggetti *della matematica sono collegati sia con le componenti più dinamiche dell'economia, in quanto questa nuova presenza è strettamente connessa alle possibilità offerte dai computer, sia con molti altri aspetti dell'organizzazione nella società moderna. Quotidianamente noi usiamo molti oggetti il cui funzionamento è basato su risultati matematici e spesso su quelli più recenti. Nell'attuale società la matematica è sempre presente, ora più che mai, ma di questo non sempre siamo consapevoli, neppure noi matematici"* (UMI, 2003).

Ecco allora delinearsi l'immagine, promossa dall'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico (OCSE) attraverso l'indagine PISA (*Programme for International Student Assessment*), di una matematica mirante al raggiungimento di un livello di competenza (traduzione controversa e dibattuta del termine *literacy*, adottato a livello internazionale) traducibile e misurabile non tanto nella *"padronanza di determinati contenuti curricolari"*, quanto piuttosto nella *"capacità di utilizzare conoscenze e abilità apprese durante gli anni di scuola per affrontare e risolvere problemi e compiti che si incontrano nella vita quotidiana"* e per continuare ad apprendere per tutta la vita (*lifelong learning*) in una prospettiva dinamica e continua dell'apprendimento (PISA, 2003).

In piena coerenza con questa visione della disciplina, l'Unione Matematica Italiana (UMI), attraverso il materiale didattico diffuso sotto il nome di *Matematica 2003* e *Matematica 2004*, propaganda l'idea di una matematica tesa, *in primis,* alla formazione del cittadino e funzionale ad una sua più consapevole partecipazione alla vita sociale.

Rientrerebbe dunque tra le finalità primarie dell'insegnamento matematico, quella di contribuire, assieme alle altre discipline, alla formazione globale dell'individuo, educando al pensiero razionale e fornendo così le chiavi per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio e gli strumenti per l'interpretazione del reale.

In perfetta sintonia con le riflessioni appena sviluppate il Piano dell'Offerta Formativa (P.O.F.) del Liceo Scientifico "E. Fermi", la scuola presso la quale sto svolgendo la mia attività di tirocinio, individua come obiettivi primari della formazione scolastica, l'educazione al rigore logico, *"come acquisizione di un abito mentale che consenta al soggetto di affrontare ogni problema in modo razionale e obiettivo, libero da pregiudizi e da un approccio immediato ed emotivo"* e l'educazione al giudizio critico, *"come potenziamento degli strumenti che rendano il soggetto capace di orientarsi in maniera autonoma e consapevole nella miriade di informazioni indifferenziate tipica della nostra società, in campo estetico, politico, ecc."*.

Accanto, però, ad una visione strumentale della disciplina, è opportuno (come sottolinea la stessa Unione Matematica Italiana) che un buon insegnamento non trascuri l'aspetto culturale della matematica, intesa come corpus di conoscenze organico, dotato di una sua coerenza logica interna e, in quanto impresa umana, di un suo percorso storico, col suo bagaglio di conquiste, ma anche di tentativi, fallimenti ed errori.

Sottolineare la valenza umana della matematica significa anche incoraggiare un apprendimento che non sia sterile memorizzazione di nozioni astratte, imposte dall'esterno, ma che sia piuttosto una costruzione personale della conoscenza, che prenda spunto dalla *"matematica che vive nel nostro corpo"* (UMI, 2003).

Si legge nella premessa al documento dell'UMI, Matematica 2003: "*…le intuizioni, le metafore concettuali ecc. non sono un primo vago approccio ai concetti matematici, qualcosa di 'sporco' e scorretto da far sparire al più presto, ma ne costituiscono un ingrediente fondamentale, che rimane anche a livelli estremi di rigore*".

E' questo un punto che a mio parere riveste un'importanza cruciale. Far leva e trarre spunto dalle intuizioni, seppure ingenue e confuse, dell'allievo, credo possa portare da un lato a rendere la matematica più stimolante e creativa e a motivarne dunque lo studio; dall'altro, a sviluppare un pensiero che stimoli l'esercizio della ragione, che poi è uno dei fini più nobili dell'insegnamento.

Insegnare matematica non è solo, dunque, educare alla semplificazione e all'astrazione, allo scopo di produrre individui in grado di maneggiare formule e algoritmi sempre più complessi, ma è anche, e soprattutto, educare alla problematizzazione, al ragionamento e all'esercizio di quell'intelligenza strategica che si mette alla prova davanti a quesiti sempre nuovi, nel tentativo di perseguire la finalità ultima dell'insegnamento che

Montaigne formula così: “meglio una testa ben fatta che una testa ben piena”.

Strategie di insegnamento

Una volta chiarito quale sia l'immagine della matematica che intendo comunicare, e quali le finalità che mi propongo di perseguire nella mia azione didattica, passerò ora a delineare una proposta di strategie di insegnamento.

Nel fare ciò, se da un lato non potrò prescindere da quelle che sono le mie personali convinzioni in merito alla matematica (e quindi dalla mia visione epistemologica della disciplina), dall'altro cercherò di orientare la riflessione verso l'analisi di alcuni aspetti chiave del processo di apprendimento, in accordo con una didattica della matematica attenta in primo luogo allo studente, che nel triangolo insegnante-allievo-sapere rappresenta l'attore attivamente impegnato nell'azione di costruzione della conoscenza (D’Amore, 1999).

Nello specifico mi riferirò ad alcuni risultati consolidati della didattica della matematica e ad indagini condotte su problemi di apprendimento dell'algebra nella scuola secondaria, anche alla luce di quanto emerso nel corso dell'osservazione prevista dal mio tirocinio.

Tema ricorrente, negli articoli dedicati a studi di questo tipo, è quello delle difficoltà dell’apprendimento legate al passaggio dall’aritmetica all’algebra. Tali difficoltà si risolvono spesso, purtroppo, nel consolidarsi di un modello di algebra come collezione di regole e tecniche di calcolo, che gli allievi tendono ad accettare passivamente, “*senza più controllo dei significati di cui tali regole sono portatrici o delle proprietà su cui tali tecniche si basano”* (Malara, 1997).

Incidentalmente, le ricadute di un fraintendimento di questo tipo sul piano motivazionale sono a mio parere devastanti, dal momento che rinunciare a comprendere il significato dei simboli con cui si ha a che fare, significa spesso anche perdere qualunque tipo di interesse nella disciplina.

Su questo piano, pur consapevole del fatto che i fenomeni di disaffezione verso la materia vanno sempre letti alla luce di un binomio motivazionevolizione che individua nell’insegnante solo uno dei due attori in gioco, credo che il docente possa fare molto. Sollecitare un atteggiamento esplorativo e attento alla ricerca di senso in tutto ciò che viene proposto, mettere in luce le possibili applicazioni di quanto si studia, evitare di assegnare esercizi ripetitivi ed eccessivamente pieni di calcoli (che spesso, peraltro, non misurano le competenze acquisite, ma semplicemente quelle che chiamerei “abilità di prestazione”), prediligendo invece problemi in cui mettere in gioco competenze strategiche, sono solo alcune delle direzioni in cui ritengo che valga la pena di orientarsi. Sembra, poi, essere universalmente riconosciuta l’utilità, anche ai fini motivazionali, di affiancare ai contenuti disciplinari considerazioni di carattere storico, che aiutino a riconoscere negli ostacoli fronteggiati da chi ci ha preceduto, le proprie difficoltà di apprendimento. Tornando al tema del passaggio dall’aritmetica all’algebra, molti ricercatori evidenziano, infatti, come l’allievo *“ripercorra il processo storico e pertanto si imbatta in ostacoli e difficoltà testimoniate dalla storia dello sviluppo del pensiero algebrico”* (Malara, 1997).

Alcuni di questi ostacoli rivestiranno per il mio lavoro un interesse particolare, dal momento che una buona trattazione del tema oggetto del mio intervento didattico, “La fattorizzazione di polinomi e le frazioni algebriche”, non può prescindere dalla conoscenza di queste criticità.

E’ ampiamente documentato, ad esempio, come uno dei principali ostacoli nell’apprendimento dell’algebra sia rappresentato dal fatto che anche questa attivi una dinamica processo-oggetto (Sfard, 1991), non sufficientemente evidenziata nell’insegnamento. L’algebra viene infatti presentata come generalizzazione dell’aritmetica, di cui utilizza segni e proprietà, ma mentre in aritmetica prevale l’idea del processo di calcolo eseguito al fine di ottenere un risultato, in algebra si privilegia lo studio delle rappresentazioni simboliche come oggetti (Malara, 1997).

In particolare, il modello di segno di uguaglianza che l’aritmetica sembra stimolare, negli adolescenti, è quello di un operatore direzionale con il significato di “dà luogo”, cosa che entra in conflitto con la nozione algebrica di uguaglianza come relazione di equivalenza (in quanto tale simmetrica e quindi bidirezionale), manifestandosi nella forma di un vero e proprio ostacolo cognitivo, se non si interviene prima che un modello così fatto si consolidi.

L’interesse di questo punto, nel caso specifico del percorso che mi troverò ad affrontare, è evidente. Presentare, infatti, la fattorizzazione di polinomi come argomento a sé, dopo l’introduzione, da parte della mia tutor, dell’operazione di prodotto tra polinomi, potrebbe penalizzare l’aspetto strutturale del concetto di polinomio (che può essere indifferentemente rappresentato come un oggetto unico, o come prodotto di uno o più fattori, purché ovviamente le due scritture siano equivalenti), in favore di un’idea che rischia di consolidare il modello di uguaglianza suggerito dall’aritmetica.

Per evitare ciò la mia tutor, già al momento di presentare il prodotto tra polinomi, metterà in evidenza il valore relazionale del segno di uguale, concetto la cui piena comprensione sarà, comunque, anche tra gli obiettivi del mio intervento.

D’altra parte la scelta didattica di dar rilievo di argomento a sé alla fattorizzazione è a mio parere difendibile, in ragione del fatto che, ad esempio, sollecita l’acquisizione di una complessa competenza, che è quella del riconoscimento di una struttura, in una delle sue tante rappresentazioni.

Nel corso del progetto, per favorire nell’apprendimento allievi con diversi stili cognitivi, mi ripropongo di adottare approcci didattici differenti (D’Amore, 1999), avvalendomi di lezioni frontali, ma anche di situazioni a-didattiche, nelle quali quesiti “insoliti” fungeranno da pretesto per l’introduzione di nuovi aspetti teorici oltre ad un piccolo laboratorio di classe, finalizzato alla discussione di problemi non convenzionali attraverso la tecnica del *cooperative learning*.

Ritengo che in questa fase, trattando con ragazzi di una prima liceo scientifico, sia prematura, da parte mia, una pretesa di rigore estremo nel linguaggio, questo anche in considerazione del fatto, comprovato dall’osservazione in aula, che l’adozione, da parte degli allievi, di un linguaggio formalmente corretto, spesso altro non è che *“una sorta di tentativo di imitazione acritica da parte dello studente”* (D’Amore, 2004), e come tale non dà alcuna garanzia sull’effettiva costruzione di conoscenza.

Durante il periodo di osservazione, inoltre, ho notato che è molto facile incorrere nel rischio di trasmette immagini riduttive (che a volte diventano vere e proprie misconcezioni) di un nuovo concetto teorico.

Per prevenire ciò, nella parte che mi compete, cercherò di presentare esempi il più possibile diversi, senza vincolarmi a rigidità ingiustificate (e.g. sempre lo stesso simbolo per l'indeterminata) ed in ogni caso evitando di classificare le varie casistiche con la pretesa di produrre un elenco esaustivo di tutti i casi possibili. Al contrario cercherò di mettere in evidenza come un problema possa non avere soluzione (e.g. fattorizzazione di x^2+1 nei razionali) o possa non essere risolvibile con strumenti di calcolo elementari (e.g. fattorizzabilità di alcuni interi ritenuti primi per molti secoli)

Per concludere con una nota positiva, confido nel fatto che uno scambio temporaneo di cattedra offra agli allievi l'opportunità di relativizzare la rigidità di alcune clausole implicite del contratto didattico instaurato con la loro insegnante (così come di quello che inevitabilmente si instaurerà con me), con l'effetto di depurare almeno in parte il rapporto allievo-sapere matematico da tutte quelle componenti che dipendono dalla mediazione didattica.

Vincoli

Il presente progetto è pensato per una classe prima del Liceo Scientifico "E. Fermi", uno dei principali licei di Bologna, inserito, come recita il P.O.F. della scuola, *"in un contesto sociale di diffuso benessere economico e d'attenta sensibilità culturale"*.

La classe, composta da ventotto alunni, tra cui due ripetenti, non rientra in alcuno dei percorsi sperimentali attivi presso il liceo e segue pertanto un curricolo tradizionale che prevede, per il docente di matematica, cinque ore di lezione settimanali.

Essa presenta un profilo piuttosto eterogeneo: alcuni alunni, infatti, si mostrano attenti ed interessati alla lezione e sembrano aver già acquisito un buon metodo di studio; altri, invece, devono essere costantemente stimolati a prestare attenzione e ad eseguire il lavoro assegnato. Tra questi ultimi emergono alcuni elementi, la cui situazione didattica, critica nella maggioranza delle discipline, è già stata ampiamente dibattuta in sede di Consiglio di Classe. Le famiglie di questi ragazzi sono state invitate dal

Coordinatore di classe a prendere visione dello scarso rendimento dei loro figli e a valutare possibili variazioni di indirizzo scolastico.
Non si evidenziano, nel complesso, grandi criticità dal punto di vista della condotta.
La mia tutor, la professoressa Lucia Batacchi, che accompagnerà la classe per l'intero biennio, ha instaurato con gli alunni un ottimo rapporto, favorendo un clima sereno, anche grazie alla sua abilità nello stemperare i momenti più critici con uno stile verbale denso di aneddoti e digressioni umoristiche.
L'intera classe le riconosce il ruolo di autorevole punto di riferimento nel processo di apprendimento della disciplina.
Il libro di testo adottato dall'insegnante, nelle ore di Algebra, è "Nuovo corso di Algebra" di N. Dodero, P. Baroncini e R. Manfredi. Nel corso del mio intervento didattico farò riferimento a quest'ultimo, per non creare grande discontinuità di approccio didattico, non trascurando però di integrare quanto in esso trattato con materiali e spunti tratti da altri libri. In particolare, mi servirò di "Matematica come scoperta" di G. Prodi, e "Il linguaggio della matematica" di F. Speranza e A. Rossi dell'Acqua. Mi riservo, poi, di rimandare alla fase di stesura della tesi di specializzazione un'analisi comparata dei diversi percorsi didattici proposti dai testi suddetti, in riferimento all'oggetto del mio lavoro.
A proposito di aspetti non più strettamente tecnico-istituzionali, quel che è emerso nel corso dell'osservazione è che molti ragazzi tendono a memorizzare i contenuti della disciplina, più che a comprenderli veramente, e che difficilmente accettano di ricorrere al ragionamento per fornire una risposta all'insegnante.
Questo è tanto più vero, quanto più vengono incitati a risolvere problemi non convenzionali, che richiedano il ricorso ad una matematica che non appartenga a quanto studiato nelle ultime due, tre settimane o l'esercizio di un po' di buon senso o di quello che B. D'Amore chiama *"controllo semantico"* (D'Amore, 1999). Significative, a tale proposito, le reazioni della classe a due problemi proposti dall'insegnante (entrambi nell'intento di mostrare i vantaggi della rappresentazione di un numero in notazione esponenziale).

Nel primo, posto come domanda nel corso di un'interrogazione alla lavagna, si richiedeva di stimare i secondi passati dalla nascita di Cristo ad oggi. L'imbarazzo prolungato della ragazza di fronte al quesito, la sua ricerca di suggerimenti dal posto e la successiva ammissione di non saperlo risolvere, è a mio parere facilmente leggibile sotto la chiave del *contratto didattico* in una delle sue molteplici, e spesso inevitabili, manifestazioni (D'Amore, 1999).

Per quanto banale e magari facilmente risolvibile in contesti diversi da quello didattico, infatti, il problema presentava la doppia difficoltà di non contenere dati espliciti, e di non manifestare riferimenti evidenti agli argomenti recentemente trattati.

Il secondo, proposto come esercizio in un compito in classe, consisteva in una semplice equivalenza tra la misura del raggio terrestre in chilometri e la sua misura corrispondente in millimetri, con la richiesta di riportare il valore ottenuto in notazione esponenziale. Uno dei ragazzi, applicando in modo evidentemente poco ortodosso l'algoritmo studiato, ha fornito, come risposta al quesito, $6{,}35 * 10^{-3}$ mm, senza preoccuparsi del senso di quanto avesse scritto.

In questo esempio mi sembra di poter rintracciare una chiara manifestazione della clausola di *delega formale* (D'Amore, 1999). E', questo, un fenomeno che mi è capitato di osservare di frequente, a volte incoraggiato da un'errata interpretazione delle aspettative dell'insegnante. La mia tutor, infatti, usa dettare degli appunti, nel corso della lezione, allo scopo di focalizzare l'attenzione della classe su alcuni punti chiave del discorso. Per alcuni ragazzi, però, gli appunti presi sotto dettatura (che, ancora una volta per regola implicita del contratto, sono un distillato di quello che la professoressa vuole che si sappia) diventano vere e proprie ricette di calcolo, di cui si servono in modo meccanico, con totale disimpegno delle loro facoltà razionali. E' quello che alcuni di loro sembrano fare, ad esempio, quando procedono al cambiamento di segno della base di una potenza all'interno di un'espressione letterale, operazione per la quale l'insegnante ha fornito loro un vero e proprio algoritmo e che si risolve spesso nella magia di segni "meno" di dubbio significato, che volano da una parte all'altra della lavagna.

Sul piano del rigore, pur avendo già dichiarato che la mia scelta sarà quella di una grande tolleranza su questo fronte, mi sembra doveroso evidenziare in questa analisi una diffusa difficoltà, all'interno della classe, nell'acquisire un lessico adeguato alla disciplina.

Prerequisiti

Riporto nel seguito un elenco di conoscenze e competenze che ritengo propedeutiche alla comprensione dei contenuti del presente progetto, segnalando che sulle definizioni di conoscenza e competenza non c'è pieno accordo in letteratura.
Personalmente distinguerò tra *conoscenze*, intese come risorse concettuali specifiche acquisite e possedute da un soggetto, e *competenze*, viste come capacità di agire, a fronte di una situazione problematica, applicando in modo ragionato e intenzionale, secondo un preciso criterio, una o più conoscenze in proprio possesso.
In questo e nel prossimo paragrafo farò riferimento alla classificazione proposta dal progetto PISA (PISA, 2004), che distingue otto competenze matematiche, evidenziando come ciascuna di queste entri in gioco secondo un livello cognitivo via via crescente, nei tre macrogruppi *della riproduzione*, *delle connessioni* e *della riflessione*.

CONOSCENZE:

- Nozione di numero primo, nei naturali.
- Insiemi numerici **N**, **Z**, **Q** ed **R** (nozione intuitiva e non formale) e proprietà delle operazioni in essi definite.
- Potenze di numeri razionali e loro proprietà.
- Nozione di radice quadrata aritmetica.
- Nozione di frazione numerica e principali proprietà. In particolare: proprietà invariantiva.
- Nozione di opposto e di reciproco in campo numerico.
- Concetto di polinomio e proprietà formali ad esso collegate. In particolare: proprietà distributiva.
- Teorema del resto e regola di Ruffini.

COMPETENZE:

- Scomporre un intero in fattori primi e ricavare *MCD* e *mcm* tra due o più interi.
- Ridurre una frazione numerica ai minimi termini.
- Confrontare due frazioni numeriche, ridurle ad uno stesso denominatore ed operare tra esse con le quattro operazioni aritmetiche fondamentali.
- Riconoscere due frazioni numeriche equivalenti.
- Riconoscere e giustificare la criticità dello zero in ambito frazionario.
- Applicare opportunamente le proprietà delle potenze in ambito aritmetico, ma anche nei processi di trasformazione di un'espressione letterale in un'altra ad essa equivalente.
- Eseguire somme e prodotti di polinomi (riconoscendo, eventualmente, i prodotti più ricorrenti, classificati in letteratura come "prodotti notevoli").
- Applicare la regola di Ruffini, ma anche l'algoritmo di divisione tra polinomi.

Usando la terminologia proposta dal progetto PISA, le suddette competenze rientrano nel raggruppamento della riproduzione ed interessano principalmente gli ambiti della *Rappresentazione* e dell'*Uso del linguaggio simbolico, formale e tecnico e delle operazioni*.

Obiettivi

Procedendo in modo analogo a quanto appena fatto a proposito dei prerequisiti, elenco nel seguito le conoscenze e le competenze che il mio intervento didattico mirerà a sollecitare. Alcune di queste, di carattere molto generale, vanno ben al di là dell'argomento del progetto ed interesseranno in modo trasversale gran parte del curricolo di matematica.

CONOSCENZE:

- Nozione di polinomio irriducibile, compatibilmente con gli strumenti formali in loro possesso.
- Equivalenza tra due espressioni letterali ed in particolare tra due distinte scritture di uno stesso polinomio.
- Aspetto bidirezionale dell'operatore di uguaglianza.
- Nozione di frazione algebrica e sue proprietà. In particolare: proprietà invariantiva.
- Nozione di campo di esistenza di una data espressione letterale ed in particolare di una frazione algebrica.
- Nozione di opposto e di reciproco in ambito letterale.

COMPETENZE:

- Eseguire raccoglimenti totali e parziali a fattor comune, in equazioni letterali la cui forma sia affine agli esempi visti in aula.
- Riconoscere in un polinomio lo sviluppo di un particolare prodotto notevole e scriverne quindi una sua rappresentazione equivalente in termini di prodotto.
- Fattorizzare un polinomio utilizzando la regola di Ruffini e, parallelamente, l'algoritmo di divisione polinomiale.
- Risolvere esercizi di completamento di prodotti notevoli.
- Riconoscere l'applicabilità di uno o più metodi di fattorizzazione, a fronte di un polinomio dato.
- Stabilire *MCD* e *mcm* tra due o più polinomi.
- Cogliere la relazione tra fattorizzabilità di un polinomio e campo dei suoi coefficienti.
- Riconoscere il ruolo giocato dal grado di un polinomio nella sua fattorizzazione.
- Individuare il campo di esistenza di una data frazione algebrica.
- Ridurre una frazione algebrica ai minimi termini.
- Confrontare due frazioni algebriche, ridurle ad uno stesso denominatore ed operare tra esse con le quattro operazioni aritmetiche fondamentali.

- Riconoscere due frazioni algebriche equivalenti e dichiarare se l'equivalenza è soddisfatta per ogni valore dell'indeterminata.

Usando la terminologia proposta dal progetto PISA, le suddette competenze rientrano, di nuovo, principalmente nel raggruppamento *della riproduzione*. Nel seguito elenco, invece, delle competenze che classificherei come inerenti al raggruppamento *delle connessioni*, del quale toccano gli ambiti del *Pensiero e ragionamento*, dell'*Argomentazione*, e della *Formulazione e risoluzione di problemi*:

- Riconoscere delle analogie strutturali tra i processi di fattorizzazione negli interi e nell'ambito di un anello di polinomi.
- Riconoscere nelle diverse espressioni, forme e strutture algebriche note, valutando però sempre criticamente la trasportabilità di ciò che è vero in un ambito, nell'altro (e.g. x^6+1 può essere riconosciuto come somma di quadrati, ma in fatto che x^2+1 non sia fattorizzabile nei reali non autorizza a concludere che neppure x^6+1 lo sia).
- Generalizzare all'ambito letterale, nozioni già note in campo numerico, ma anche, al contrario, interpretare una data proprietà generale, ricorrendo ad un esempio numerico.
- Congetturare, argomentare e dimostrare riguardo al tema della divisibilità negli interi di espressioni numeriche, rappresentate formalmente attraverso il ricorso ad un'indeterminata, facendo ricorso alle tecniche di fattorizzazione studiate.

Organizzazione dei contenuti

Per quanto riguarda la pianificazione delle fasi del progetto, riporto nel seguito una proposta di massima, alla quale mi riservo di apportare modifiche, principalmente nella distribuzione dei tempi, in funzione della risposta che otterrò dalla classe nel corso dell'intervento.

FASE 0: Test preliminare per l'accertamento dei prerequisiti (1 ora).

Si tratterà di una prova, che proporrò alla classe all'inizio del mio intervento, che non avrà la veste di una verifica sommativa. Il suo scopo, infatti, non sarà tanto quello di produrre un voto, quanto, da una parte, quello di permettermi di ridisegnare più consapevolmente il presente piano (operando, nel corso del suo svolgimento, le eventuali modifiche cui accennavo sopra o anche variazioni strategiche, nel presentare i contenuti), dall'altra, quello di fungere da base per una mia riflessione finale sia sull'efficacia dell'azione didattica, sia sui traguardi raggiunti dalla classe.

In questo senso, registrando lo stato iniziale delle conoscenze, contribuirà anche alla valutazione conclusiva del profitto degli allievi, agevolando l'individuazione di eventuali percorsi migliorativi.

FASE 1: Introduzione alla fattorizzazione dei polinomi (1 ora).

La nozione di fattorizzazione non dovrebbe essere oscura alla classe. Credo sia bene introdurla mettendo in luce le analogie con quanto già conoscono per gli interi e mostrando come i polinomi irriducibili giochino lo stesso ruolo dei numeri primi.

Osservo solo brevemente che sollecitare il riconoscimento di analogie strutturali fra i due ambiti favorisce, a mio parere:

- la comprensione di nuovi contenuti;
- lo sviluppo di una buona agilità mentale e della capacità di isolare degli invarianti, nel passaggio da un contesto ad un altro (e quindi educa anche alla generalizzazione);
- la costruzione di un modello strutturale dell'algebra.

Uno svantaggio dal quale mi guarderò, però, potrebbe essere quello di incoraggiare la totale sovrapposizione dei due modelli, con la conseguenza di non riuscire poi a giustificare tutto ciò che succede in un contesto e che non trova corrispondenza nell'altro (e.g. la possibilità di avere due fattorizzazioni distinte per uno stesso polinomio).

Per giustificare l'introduzione del nuovo argomento e motivarne lo studio, ne anticiperò già in questa fase qualche applicazione interna alla disciplina, cercando, anche attraverso il ricorso ad esempi numerici, di trasmettere alla classe l'esigenza, di fronte ad esempio ad un'espressione frazionaria, di uno

strumento che ci permetta di rappresentare delle somme sotto forma di prodotti.
Ad aprire la lezione, potrebbe essere una banale "provocazione" a-didattica, come un indovinello del tipo: "Pensa ad un numero da uno a dieci. Fanne il quadrato. Sottrai un'unità. E' vero che il numero che hai trovato può scriversi come prodotto di due fattori che differiscono tra loro di due unità?". Quesiti di questo tipo, comunque, faranno parte di un piccolo lavoro di riflessione collettiva, che proporrò alla classe nella fase 3.

FASE 2: Tecniche di fattorizzazione più comuni (6 ore).
Mostrerò a questo punto i più comuni metodi di fattorizzazione: raccoglimento a fattor comune totale e parziale; riconoscimento di sviluppi di prodotti notevoli; utilizzo del teorema del resto e della regola di Ruffini; fattorizzazione di trinomi notevoli.
Ci terrò ad evidenziare, però, che tali tecniche non forniscono un elenco completo di soluzioni al problema della fattorizzazione e che la loro applicabilità è collegata anche all'insieme dei coefficienti in questione.

FASE 3: Principali applicazioni. In particolare: *MCD* e *mcm* (2 ore).
In questa fase introdurrò *MCD* e *mcm* e tenterò di farlo attraverso degli esercizi, che anticiperanno la formalizzazione teorica di tali concetti, per stimolare interesse, capacità di astrazione e di generalizzazione di un concetto noto in ambito numerico, e spirito di *problem solving.*
Se il tempo lo consentirà farò anche qualche cenno storico (e.g. calcolo del *MCD* attraverso l'algoritmo di Eucilde).
Sempre con attenzione al *problem solving,* ma anche al fine di incoraggiare la collaborazione, nel processo di costruzione della conoscenza, proporrò alla classe dei piccoli lavori di gruppo su alcuni quesiti non convenzionali del tipo: "Dimostrare che per ogni naturale n, n^3-n è sempre divisibile per 6", oppure: "Sia n un intero. Quali condizioni imporresti sul suo valore, affinche n^2-1 sia divisibile per 11", o ancora: "Dimostrare che il valore assunto dal polinomio n^4-n^3+n^2-n, per ogni n naturale, è un numero pari".
La struttura in fasi fin qui presentata non sarà rigidamente sequenziale: la fase 2 e la 3, ad esempio, potranno procedere in parallelo.

FASE 4: Frazioni algebriche (8 ore)
Continuando a sollecitare il riconoscimento di analogie con quanto già visto in ambito numerico, passerò a trattare le funzioni algebriche (e la problematica del loro campo di esistenza), mostrando come l'introduzione di questi nuovi oggetti consenta la scrittura del reciproco di un polinomio e quindi la "chiusura moltiplicativa" dell'insieme dei polinomi.
Sia attraverso segnalazioni esplicite, sia attraverso la scelta di esercizi ad hoc, cercherò di far emergere le criticità dell'argomento ed i più comuni errori. E' ad esempio frequente che gli allievi semplifichino numeratore e denominatore, anche in presenza di somme. L'analogia col caso numerico, vista in questo caso come ricorso alla "*particolarizzazione*" (Malara, 1997) può essere in questo caso di grande aiuto.

FASE 5: Verifica conclusiva (2 ore)
A conclusione dell'intervento, proporrò alla classe un compito in classe, preparato in collaborazione con la loro insegnante, allo scopo di valutare conoscenze e competenze acquisite. La prova conterrà esercizi di routine, al fine di accertare la capacità di applicazione di quanto visto in aula, ma anche un quesito che richieda i ricorso a capacità di ragionamento, e che permetta di sondare la profondità delle competenze raggiunte.

Valutazione

Tenendo presente che, sotto un'accezione meno restrittiva di quella diffusa nel senso comune, il termine valutazione, in pedagogia, ha a che fare non solo con la misura del profitto dello studente, ma anche con il ritorno informativo sull'efficacia dell'azione didattica (Fandiño Pinilla, 2002), distinguerò, nel seguito, due binari lungo i quali avrei intenzione di muovermi.
Riguardo al primo dei due obiettivi, adotterò diversi strumenti di valutazione, che andranno dalla tradizionale verifica scritta, al lavoro di gruppo; dalla sollecitazione di interventi dal posto (e a questo riguardo credo sia importante tenere in considerazione non solo le risposte fornite a richiesta, ma anche le domande poste spontaneamente dagli allievi), alle

interrogazioni alla lavagna e, infine, alla raccolta di dati valorativi, anche attraverso la tecnica degli *informes* (Fandiño Pinilla, 2002). Tale valutazione dovrà ovviamente consentire l'accertamento degli obiettivi sopra evidenziati (e in questo senso fornirà anche preziosi spunti di riflessione per considerazioni conclusive sul secondo fronte: quello dell'efficacia dell'insegnamento), ma sarà sempre condotta con attenzione al *processo*, più che al *prodotto* (Fandiño Pinilla, 2002) e quindi anche tenendo presente la situazione oggettiva da cui parte ogni singolo allievo, e la classe nel suo complesso. Di qui, l'utilità del test iniziale, così come dell'osservazione che ha preceduto questo lavoro.

Ai fini dell'accertamento degli obiettivi, come ho già avuto modo di dire, non intendo limitarmi a misurare prestazioni di abilità applicative di quanto visto in aula. Al contrario, il mio intento sarà quello di mettere in luce, e valutare, l'effettivo apprendimento di concetti e l'acquisizione di competenze che vadano al di là del semplice utilizzo meccanico di regole appena studiate. Il lavoro di gruppo sarà, in questo senso, un ottimo strumento di valutazione, permettendomi di osservare i processi mentali seguiti dagli allievi per raggiungere un obiettivo.

Tra le finalità primarie di questo primo aspetto della valutazione, metterei in evidenza i suoi obiettivi formativi, sia nell'offrire ritorni ai ragazzi, sulle loro lacune, sia nel trasmettere implicitamente cosa è realmente importante e cosa no. E' chiaro, però, che il mio modo di procedere non potrà non prescindere, nella definizione di questa sorta di scaletta delle priorità, dalla mia personale visione della matematica.

In riferimento, invece, al secondo aspetto della valutazione, il ritorno informativo sull'efficacia dell'azione didattica, mi limito ad osservare che una vera riflessione in proposito potrà avvenire solo al termine del mio intervento, sulla base degli obiettivi raggiunti, ma anche della partecipazione e dell'interesse suscitati nella classe, per gli argomenti trattati e per la disciplina in generale. E' però vero che, per tutto il corso del progetto, sarà per me fondamentale prestare attenzione a questo punto, per valutare criticamente, in qualunque fase del lavoro, le scelte fatte in termini di contenuti, tempi e strategie di insegnamento.

Confido, infine che l'intera esperienza di tirocinio possa offrire preziosi spunti per una valutazione conclusiva del percorso di crescita culturale e professionale proposto dalla Scuola di Specializzazione per l’Insegnamento e dell’effetto che tale esperienza ha prodotto sulle mie concezioni matematiche, sui miei personali modelli mentali, sul mio spirito critico.

Riferimenti bibliografici

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*. 4, 4-30.

Dodero N., Baroncini P., Manfredi R. (1996). *Nuovo corso di algebra per il biennio delle scuole superiori*. Milano: Ghisetti e Corvi Editori.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). Curricolo e valutazione in matematica. Bologna: Pitagora.

Malara N. A. (1997). Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra. *La matematica e la sua didattica*. 2, 176-185.

NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft*.

PISA (2004). *Valutazione dei quindicenni*. Frascati: Armando editore.

Sfard A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics*. 22(1), 1-36

UMI (2003). *Matematica 2003 – Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica*.

UMI (2004). *Matematica 2004 – La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica.*

Siti consultati

LICEO FERMI. http://www.liceofermibo.net

PLS. http://www.progettolaureescientifiche.it

OCSE/PISA. http://archivio.invalsi.it/ri2003/pisa2003/

ALLEGATO 2

TEST VALUTATIVO DEI PREREQUISITI

1. Determina la minore tra le seguenti frazioni e giustifica brevemente la tua scelta: [0.5]

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{8}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $\frac{1}{2}$.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2. Quale delle seguenti frazioni è equivalente a $\frac{2}{9}$? [0.5]

a) $\frac{3}{5}$; b) $\frac{30}{90}$; c) $\frac{10}{45}$; d) $\frac{9}{2}$.

Sapresti scrivere una nuova frazione, ancora equivalente a $\frac{2}{9}$, diversa dalle precedenti?

……………………………………………………………………………………

3. Scrivi quali uguaglianze tra le seguenti sono corrette e spiega quali proprietà sono state applicate: [0.5]

a) $(7+3)\cdot 2 = (7+2)\cdot(3+2)$; b) $(7+3)\cdot 2 = 7\cdot 2 + 3\cdot 2$

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

c) $\frac{3+3}{5+3}=\frac{3}{5}$ d) $\frac{3+3}{5+3}=\frac{3}{4}$

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

4. Sia A l'insieme dei multipli di 2 e B l'insieme dei multipli di 3. In quale relazione è, con i precedenti, l'insieme dei multipli di 6? [1.5]

…………………………………………………………………………………………

Presi due qualunque interi in A ed in B a quale insieme apparterrà il loro minimo comune multiplo?

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

ALLEGATO 3

LAVORO DI GRUPPO: SCHEDA A

1. Sia n un intero. Senza sviluppare il quadrato del binomio, dimostrare che $(n+4)^2 - n^2$ è sempre divisibile per 4.

Più in generale dimostrare che $(n+k)^2 - n^2$ è sempre divisibile per k con k intero.

2. a, b e c sono tre numeri naturali. Sappiamo che a è divisibile per 15, b è divisibile per 12 e c è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

(a) $a^2 + b^2 + c^2$ è divisibile per 18;
(b) $a + b + c$ è divisibile per 9;
(c) $a + b + c$ è divisibile per 2;
(d) $(a + b + c)^2$ è divisibile per 9;
(e) $a^2 + b^2 + c^2$ è divisibile per 15;

3. Dimostrare che il prodotto di due pari consecutivi è divisibile per 8.

4. Sia n un numero intero. Quale condizione imporresti su n affinché $n^2 - 1$ sia divisibile per 11?

E' possibile, per qualche valore i n, $n^2 - 1 = 11$?

ALLEGATO 4

LAVORO DI GRUPPO: SCHEDA B

1. Dimostrare che il valore assunto dai seguenti polinomi per ogni *n* naturale, è un numero pari:

$n^3 - n^2$, $n^3 + 2n^2 + n$, $n^4 - n^3 + n^2 - n$.

Se n è multiplo di 5, con quale cifra terminano i valori assunti dai polinomi sopra elencati? Perché?

2. Sapendo che $a^2 - b^2 = 36$ e che $a + b = 18$, calcolare quanto vale $a - b$. Quanto vale *a*? Quanto vale *b*?

3. Dimostrare che per ogni n naturale $n^3 - n$ è divisibile per 6.

4. Dimostrare che $x^2 + 2x + 3$ è irriducibile nei razionali.

ALLEGATO 5

SCHEDA DI RIEPILOGO SULLA FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI

1. Cosa si intende per "fattorizzazione di un polinomio"? Spiegalo con parole tue.

2. a) Cosa vuol dire "polinomio irriducibile"?
b) Sapresti farne un esempio?
c) Secondo te l'irriducibilità di un polinomio è un concetto assoluto o dipende dal "contesto" in cui scegliamo i coefficienti?
d) In quale contesto abbiamo scelto di operare nel corso delle nostre lezioni?
e) Fai, se pensi che esista, un esempio di polinomio irriducibile in un contesto e fattorizzabile in un altro.

3. a) Sapresti fattorizzare, in termini non ulteriormente riducibili, il polinomio $x^3 + x^2 - 3x - 3$?
b) Qual è il resto della divisione del polinomio dato per $x + 1$?
c) Che cosa hai applicato per rispondere?
d) Avresti potuto dare la stessa risposta seguendo un altro ragionamento?

4. a) Quante tecniche diverse puoi applicare per fattorizzare in termini irriducibili il polinomio $x^3 - x^2 - 6x$?
b) Ti aspetti che si arrivi allo stesso risultato?
c) Trovi che esista una strada più "conveniente"?

5. Fattorizza il polinomio $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$.

6. Scrivi, se vuoi, un esempio di esercizio che hai avuto difficoltà a svolgere e cerca di chiarire il motivo delle tue difficoltà.

ALLEGATO 6

PRIMA VERIFICA SOMMATIVA: LA FATTORIZZAZIONE DI POLINOMI A COEFFICIENTI RAZIONALI

1. Scomporre in fattori il seguente polinomio finché risulti non ulteriormente riducibile:

$$4(x+y)^2 z - 25w - 25z + 4(x+y)^2 w$$

2. Sia dato il polinomio $x^4 - 27x + x^3 - 27$. Determinare per quale dei seguenti polinomi esso risulta divisibile e giustificare la risposta:

a) $x^2 + 3x + 9$; b) x; c) $x + 1$; d) $x + 6$; e) x^2.

3. Dimostrare che $x^2 + x + 1$ non è fattorizzabile nel prodotto di due polinomi a coefficienti razionali.

4. Calcolare il MCD ed il mcm fra i seguenti polinomi:

a) $x^2 - x - 2$; b) $x^3 - 8$; c) $4 - x^2$.

ALLEGATO 7

SECONDA VERIFICA SOMMATIVA: LE FRAZIONI ALGEBRICHE

1. Determinare i valori di x per i quali le seguenti frazioni perdono significato:

$$\frac{1}{x^2}; \quad \frac{1}{6x}; \quad \frac{3}{2x^2-32}; \quad \frac{5x-1}{x^2-6x+8}; \quad \frac{3x}{(x+1)(x-2)}.$$

2. Eseguire la seguente somma algebrica, dopo aver determinato il campo di esistenza delle frazioni che vi compaiono:

$$\frac{1-9a^2}{(1-3a)^2}-\frac{(1-3a)^2}{9a^2-1}$$

3. Calcolare la seguente espressione e semplificare il risultato:

$$\left[\frac{x^6-y^6}{x^2y^2}:\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)\right]:\left(x^2-xy+y^2\right)$$

4. Quand'è che un'operazione si dice *interna* ad un insieme?
Sia ***P*** l'insieme dei polinomi a coefficienti razionali. La moltiplicazione è un'operazione *interna* in ***P***?
E la divisione?
Sia ora ***F*** l'insieme delle funzioni algebriche i cui numeratori e denominatori appartengano a ***P***. La moltiplicazione è un'operazione *interna* in ***F***?
E la divisione?