

Il ragionamento probabilistico ingenuo

Vittorio Girotto

Dipartimento di Arti e Disegno Industriale, Università IUAV di Venezia,
Laboratoire de Psychologie Cognitive, CNRS-Université de Provence
e-mail: vgirotto@iuav.it ; girotto@up.univ-mrs.fr

[Lavoro originalmente pubblicato in Conferenze e Seminari 2002-2003, a cura di E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti, Torino, Associazione Subalpina Mathesis & Seminario di Storia delle Matematiche "Tullio Viola". Si ringrazia il suo Presidente, Prof. Franco Pastrone, Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, per l'autorizzazione alla ripubblicazione. Per informazioni sull'Associazione Subalpina Mathesis: <http://www.dm.unito.it/mathesis/mathesis.htm>]

Questo lavoro presenta i principali risultati della ricerca sul ragionamento probabilistico ingenuo. La prima sezione riguarda gli errori sistematici di giudizio probabilistico prodotti dall'applicazione di procedure euristiche. Nelle due sezioni seguenti sono presentati dati sperimentali ottenuti con adulti e bambini e tracce storiche che dimostrano l'esistenza di una competenza estensionale ingenua, cioè di una capacità non esperta di stimare correttamente la probabilità di un evento sulla base dei modi in cui questo può verificarsi. Questi risultati sono discussi in relazione all'ipotesi evuzionista secondo cui la mente umana si è adattata per trattare informazioni relative a frequenze ma non a probabilità di eventi singoli.

Le persone che non conoscono il calcolo delle probabilità, vale a dire la quasi totalità degli esseri umani, sono in grado di trarre inferenze probabilistiche corrette? Negli ultimi trent'anni la ricerca in psicologia cognitiva ha prodotto dei risultati che inducono a rispondere negativamente a questa domanda. Numerosi lavori sperimentali, infatti, hanno dimostrato che la maggioranza delle persone (di solito studenti universitari privi di addestramento formale in campo probabilistico) non è in grado di risolvere in modo normativamente corretto problemi richiedenti valutazioni di probabilità. Negli ultimi anni, però, sono state condotte delle ricerche i cui risultati sembrano riabilitare le capacità delle persone non esperte a ragionare su eventi incerti.

Lo scopo del presente articolo è quello di offrire una breve introduzione allo studio del ragionamento probabilistico. Nella prima sezione saranno presentati alcuni esempi di ricerche che hanno dimostrato i limiti del giudizio probabilistico intuitivo. Nelle due sezioni seguenti, saranno presentati gli argomenti teorici e i risultati delle ricerche che hanno contribuito a dimostrare l'esistenza di una sorta di senso intuitivo del probabile.

1. Errori nel giudizio probabilistico ingenuo

Quasi tutti i primi importanti lavori sperimentali sul ragionamento probabilistico sono stati condotti da due psicologi israeliani, Daniel Kahneman (premio Nobel per l'economia nel 2002) e Amos Tversky (scomparso nel 1996). Il bersaglio teorico della loro ricerca lavori era la teoria della scelta razionale. Secondo tale teoria, tuttora dominante in campo microeconomico, l'attore razionale risolve problemi di decisione in condizioni d'incertezza massimizzando l'utilità attesa, cioè scegliendo le alternative che hanno la maggior probabilità di produrre i migliori benefici. Un ingrediente essenziale della scelta razionale è, quindi, la capacità di valutare correttamente la probabilità di accadimento di eventi incerti. Contro questa prospettiva, allo stesso tempo norma relativa ad un attore ideale e tentativo di formalizzazione delle scelte degli attori reali, le ricerche condotte da Kahneman e Tversky hanno dimostrato che le persone non sono sempre in grado di valutare correttamente le probabilità e di fare scelte economicamente vantaggiose (per rassegne recenti, v. Gilovich, Griffin, & Kahneman, 2002; Kahneman & Tversky, 2000). Per rendere conto di questi risultati, consideriamo un famoso esperimento condotto da Tversky e Kahneman (1983). Un gruppo di partecipanti era invitato a predire quante parole di sette lettere terminanti in "ing" si possono trovare in quattro pagine prese a caso da un romanzo di lingua inglese. Ad un secondo gruppo di partecipanti era posto un quesito analogo: predire il numero di parole di sette lettere aventi "n" come penultima lettera. Le parole "...ing" sono ovviamente parole "....n.". Di conseguenza in un testo ci saranno almeno tante parole della seconda classe quante parole della prima. Il primo gruppo di partecipanti, però, predisse una frequenza di parole "...ing" significativamente superiore alla frequenza di parole "...n." predetta dal secondo gruppo di partecipanti. Questi giudizi rappresentano una violazione della regola della congiunzione, secondo la quale:

$$p(\text{parola "...ing"}) \leq p(\text{parola "...n."}).$$

Quale può essere la fonte di questi giudizi erronei? Secondo Tversky e Kahneman, i problemi di ragionamento sono spesso risolti attraverso l'applicazione inconsapevole di euristiche, cioè di procedure economiche che, nella maggior parte dei casi, portano a soluzioni corrette, ma che, in alcuni casi, possono portare ad errori sistematici di giudizio (biases). Nel caso specifico, i partecipanti possono aver tentato di risolvere il problema usando l'euristica della disponibilità, cioè cercando di stimare la frequenza di parole delle due classi sulla base della facilità di recupero dalla memoria di esemplari delle stesse: tanto più ampia risulterà la frequenza di parole ricordate, tanto più grande sarà stimata la categoria cui tali parole appartengono. Per controllare questa spiegazione, Tversky e Kahneman chiesero ad altri due gruppi di partecipanti di produrre, in un minuto di tempo, quante più parole possibili delle due categorie. Data l'organizzazione della memoria umana e date le conoscenze dei parlanti della lingua inglese, i quali naturalmente possono recuperare con facilità molti esemplari di parole che terminano in "ing", era plausibile prevedere una differenza significativa nelle risposte dei due gruppi di partecipanti. Come predetto, infatti, i partecipanti che dovevano ricordare parole di tipo "...ing" produssero in media un numero doppio parole rispetto ai partecipanti che dovevano ricordare parole di tipo "...n.". Questo risultato dimostrava, quindi, che gli errori di giudizio nella stima della frequenza di parole delle due categorie dipendevano dalla maggior disponibilità di esemplari di una

di esse, cioè che la violazione della regola della congiunzione dipendeva dall'applicazione erranea dell'euristica della disponibilità.

Le ricerche relative all'uso delle euristiche hanno dimostrato i limiti delle capacità di ragionamento probabilistico non esperto. Negli ultimi anni, però, è emersa una visione molto più pessimistica, secondo la quale la mente umana non è semplicemente limitata, ma intrinsecamente incapace di trattare le informazioni probabilistiche (v. Cosmides & Tooby, 1996; Gigerenzer & Hoffrage, 1995). L'argomento evoluzionista che sta alla base di questa visione può essere così riassunto:

La probabilità di un evento singolo è inosservabile.

L'evoluzione naturale non ha prodotto dei meccanismi cognitivi dedicati al trattamento di informazioni che non sono osservabili.

Di conseguenza:

L'evoluzione naturale non ha prodotto dei meccanismi cognitivi dedicati al trattamento dell'informazione probabilistica.

Che le persone non esperte abbiano difficoltà a trattare le probabilità di eventi singoli sembra dimostrato dalla loro incapacità di risolvere problemi come il seguente:

Si sta studiando un test per la diagnosi di una nuova malattia. Ecco le informazioni relative alla malattia e i risultati del test:

-Una persona sottoposta al test ha il 4% di probabilità di aver contratto la malattia.

-Se una persona ha contratto la malattia, ha il 75% di probabilità di avere una reazione positiva al test.

-Se una persona non ha contratto la malattia, ha comunque il 12.5% di probabilità di avere una reazione positiva al test.

Immagina che Paolo venga sottoposto al test. Se ha una reazione positiva, qual è la probabilità che abbia contratto la malattia?

Una soluzione esperta di questo problema consiste nell'applicazione della regola della probabilità condizionale, cioè:

$$p(\text{malato}|\text{positivo}) = p(\text{malato} \& \text{positivo})/p(\text{positivo}) = 20\%$$

Il punto è che la quasi totalità dei partecipanti (92%), compresi membri di prestigiose scuole americane di medicina (v. Casscells, Schoenberger e Grayboys, 1978), non è in grado di risolvere il problema in questione e fornisce una risposta che, molto spesso, equivale alla probabilità condizionale inversa (75%).

Secondo l'ipotesi evoluzionista, se le persone non esperte sono incapaci di stimare le probabilità di eventi singoli, dovrebbero però essere in grado di fornire delle predizioni di frequenza corrette. Infatti, anche se i nostri antenati ominidi non potevano osservare le probabilità di eventi singoli (per es. la probabilità che una tribù vicina avesse delle intenzioni ostili), erano però in grado di osservare la ripetizione di

eventi reali e registrarne le frequenze (per es. “Siamo andati a caccia nelle montagne opposte al sole per venti volte e abbiamo catturato la preda cinque volte”). Di conseguenza, assumendo che la selezione naturale abbia dotato la mente umana di un meccanismo innato per trattare le frequenze, è possibile predire che le persone non esperte siano in grado di risolvere versioni dei problemi probabilistici nei quali le informazioni numeriche esprimano valori di frequenza e la domanda richieda una predizione di frequenza. Per esempio, le persone dovrebbero poter risolvere la seguente versione del problema della malattia:

E' allo studio un test per la diagnosi di una nuova malattia. Ecco le informazioni relative alla malattia e i risultati del test:

-4 persone su 100 avevano contratto la malattia.

-3 delle 4 persone che avevano contratto la malattia hanno avuto una reazione positiva al test.

-12 delle 96 persone che non avevano contratto la malattia hanno comunque avuto una reazione positiva al test.

100 persone sono ora sottoposte al test. In questo gruppo di 100 persone, ci attendiamo che ___ persone avranno una reazione positiva, e che tra queste ___ avranno contratto la malattia.

In effetti, questa versione del problema, che richiede non la stima della probabilità che una persona singola sia ammalata ma la predizione della frequenza di persone malate tra quelle positive (3 su 15), risulta più facile da risolvere della versione originale.

Oltre ai risultati sperimentali, anche un argomento di ordine storico sembra corroborare l'ipotesi frequentista-evoluzionista:

(...) the notion of ‘probability’ did not gain prominence in probability theory until one century after the mathematical theory of probability was invented (...) Percentages became common notations only during the 19th century (...) Thus, probabilities and percentages took millennia of literacy and numeracy to evolve; organisms did not acquire information in terms of probabilities and percentages until very recently. How did organisms acquire information before that time? (Gigerenzer & Hoffrage, 1995, p. 686).

Secondo i sostenitori dell'ipotesi evoluzionista-frequentista la risposta a questa domanda retorica è semplice: prima dell'invenzione del calcolo delle probabilità “gli organismi” (o, più correttamente, “gli esseri umani”) acquisivano informazioni in modo sequenziale, cioè sotto forma di frequenze naturali, ed erano quindi in grado di fare delle predizioni di frequenza corrette.

Il tentativo di fondare l'analisi dei processi cognitivi su base evoluzionista è teoricamente molto rilevante ed è forse una delle ragioni che spiegano il successo ottenuto dall'ipotesi evoluzionista-frequentista al di fuori della cerchia degli specialisti del pensiero umano (v. per es. Pinker, 1997/2000). Tuttavia, i risultati di alcuni lavori recenti, discussi nella prossima sezione, dimostrano l'infondatezza di una visione così

radicalmente pessimistica delle capacità di ragionamento probabilistico dei non esperti.

2. *Il ragionamento estensionale ingenuo*

Esiste una modalità non esperta che permetta di valutare correttamente le probabilità di eventi singoli? Secondo un'ipotesi derivata dalla più importante teoria del ragionamento deduttivo, quella dei modelli mentali, le inferenze probabilistiche spontanee sono tratte, al pari di quelle deduttive, in modo estensionale (Johnson-Laird, Legrenzi, Girotto, Sonino-Legrenzi & Caverni, 1999). In altre parole, le persone non esperte ragionano non applicando regole (equivalenti a quelle della logica standard o a quelle del calcolo delle probabilità) ma sulla base di rappresentazioni (modelli) mentali di possibilità. Consideriamo un caso molto semplice:

C'è una scatola che contiene una pallina gialla o una pallina rossa od entrambe le palline. Qual è la probabilità dell'evento seguente "Nella scatola c'è una pallina gialla"?

Un partecipante esperto potrebbe rispondere che la probabilità dell'evento in questione può variare da 0 a 1. Invece, la quasi totalità dei partecipanti, studenti universitari non esperti di calcolo probabilistico, interrogati da Johnson-Laird e colleghi risposero che la probabilità di trovare una pallina gialla nella scatola era pari a 1/3. Secondo la teoria dei modelli mentali, le persone che tentano di risolvere questo problema si rappresentano il contenuto della prima frase nel modo seguente:

Giallo	
	Rosso
Giallo	Rosso

In questa rappresentazione le tre righe indicano tre modelli mentali diversi, ognuno dei quali rappresenta una possibilità vera: la prima riga rappresenta la possibilità che la scatola contenga una pallina gialla, la seconda che ne contenga una rossa, la terza che contenga sia una pallina gialla che una rossa. Poiché uno solo dei tre modelli rappresenta la possibilità che ci sia una pallina gialla, i partecipanti concludono che la probabilità di tale evento è pari a 1/3. Insomma, i partecipanti traggono delle inferenze probabilistiche sulla base della proporzione di modelli, tra quelli costruiti, che rappresentano l'evento che devono stimare. Tali inferenze possono essere definite "estensionali", perché tratte sulla base dell'enumerazione delle diverse possibilità in cui gli eventi possono verificarsi, e "ingenuo" dato che non sono basate sull'applicazione delle regole del calcolo probabilistico.

La presenza di forme di ragionamento estensionale non esperto è stata dimostrata anche con problemi nei quali le informazioni probabilistiche sono presentate in termini numerici. Consideriamo, ad esempio, la seguente versione del problema della malattia:

E' allo studio un test per la diagnosi di una nuova malattia. Ecco le informazioni relative alla malattia e ai risultati del test:

-una persona testata aveva, su un totale di 100 possibilità, 4 possibilità di contrarre la malattia.

-3 delle 4 possibilità di contrarre la malattia erano accompagnate da una reazione positiva al test.

-12 delle 96 possibilità di non aver contratto la malattia erano comunque accompagnate da una reazione positiva al test.

Immagina che Paolo venga sottoposto al test. Se ha una reazione positiva, su 100 possibilità in totale, ci saranno ___ possibilità che la reazione sia associata alla malattia, contro ___ possibilità che la reazione non sia associata alla malattia.

In questo caso, i valori numerici che esprimono le probabilità sono dei numeri interi (e non delle percentuali), dai quali sono facilmente estraibili le due congiunzioni (malato&positivo = 3; non-malato&positivo = 12) che servono per l'eventuale calcolo del rapporto

$$p(\text{malato \& positivo})/p(\text{positivo}) = 3/(3+12).$$

Questa versione, però, presenta anche un'altra particolarità, rispetto a quella originale, cioè la domanda finale non richiede il calcolo di un rapporto di probabilità ma, più semplicemente, la comparazione delle possibilità associate alle due ipotesi possibili (malato vs. non-malato). Una simile domanda, definibile comparativa o distributiva, riflette un modo usuale di esprimere l'incertezza nella vita quotidiana (v. le odds o quote usate nelle scommesse: "la squadra A batterà la squadra B 20 a 1"), che sembra precedere l'invenzione del calcolo delle probabilità, come testimonia il seguente verso:

"Twenty to one then he is shipped already"
(Shakespeare, *The Two Gentlemen of Verona*, I, 1).

Ponendo una domanda distributiva e fornendo i valori numerici relativi alle possibilità che una persona sia, rispettivamente, malata e positiva e sana e positiva, il problema della malattia non dovrebbe essere difficile da risolvere. Infatti, la quasi totalità dei partecipanti (85%) interrogati da Girotto e Gonzalez (2001) ha fornito la risposta corretta (3 vs. 12), dimostrando così di essere in grado di trarre inferenze estensionali corrette. Questi e altri risultati (v. Girotto & Gonzalez, 2002), oltre a corroborare l'ipotesi di una competenza estensionale ingenua, non sono spiegabili sulla base della teoria evoluzionista-frequentista. La nuova versione del problema della malattia, infatti, presenta informazioni relative alla probabilità di un caso singolo (la possibilità che una persona contragga la malattia) e richiede la valutazione della probabilità di un caso singolo (Paolo ha contratto la malattia). In altre parole, la nuova versione presenta gli stessi elementi che, secondo teoria evoluzionista-frequentista, rendono quasi impossibile la risoluzione di quella originale, data l'intrinseca incapacità della mente umana a trattare le probabilità di eventi singoli.

3. Intuizioni estensionali precoci

Se esiste una competenza estensionale intuitiva, si dovrebbero trovare prove di inferenze probabilistiche corrette anche in persone che, a differenza degli studenti universitari non esperti, sono totalmente prive di conoscenze relative al calcolo delle probabilità. In particolare, si dovrebbero dimostrare capacità di ragionamento estensionale corretto nei bambini o in persone vissute prima dell'invenzione del calcolo stesso. L'argomento storico usato dai sostenitori dell'ipotesi evolucionista-frequentista è simile alla tesi resa popolare dal celebre lavoro di Hacking (1975): in epoca pre-moderna erano assenti anche le nozioni di base della probabilità logica, come, ad esempio, la nozione di evidenza contingente. Sulla base di una documentazione storica impressionante, Franklin (2001) ha però dimostrato che, ben prima del 600, venivano usati argomenti di probabilità logica. Per esempio, teologi morali, giuristi e mercanti del medioevo erano in grado di distinguere tra prove conclusive e prove non conclusive e di valutare, in modo non numerico, il grado di certezza delle conclusioni sulla base del grado di certezza delle evidenze. Anche nel caso della probabilità aleatoria, esistono tracce scritte della capacità di trarre inferenze corrette da parte di individui vissuti in epoca pre-moderna. Il caso più importante riguarda i giochi d'azzardo, come la celebre zara. Menzionato da Dante (Purgatorio, Canto VI, 1-4), tale gioco, che consisteva nell'indovinare la somma prodotta dal lancio di tre (in qualche caso due) dadi, è stato correttamente analizzato in modo estensionale da diversi commentatori trecenteschi della Divina Commedia. Scrive, per esempio, della Lana (1324-1328/1866-1867):

(...) che avvegnachè li dadi siano quadrati, e ch'elli sia possibile a ciascuna faccia venire di sopra, di ragione quello numero che gli è più volte, dee più spesso venire.

Questi autori, anche se spesso incapaci di produrre una combinatoria completa delle possibilità, erano comunque in grado di analizzare razionalmente il gioco, stimando l'attesa di un evento sulla base del numero dei modi in cui questo poteva verificarsi. Per esempio, Da Buti (1385-95/1852-62) scrive:

(...) ragionevilmemente più dè tornare quel punto che v'è in più modi, che quello che v'è pure in un modo o in due; ecco in du' dadi sette v'è in tre modi; cioè quattro e tre, sei asso, cinque e du'; e quattro v'è in due modi cioè tre asso e du' uno, e così in tre dadi.

Insomma, esistono prove che, ben prima dell'invenzione del calcolo delle probabilità, le persone erano in grado di risolvere problemi decisionali sulla base di un trattamento estensionale delle possibilità (per un'analisi più completa, v. Girotto & Gonzalez, in stampa a).

Come gli adulti vissuti nel medioevo, anche i bambini dimostrano di esser in grado di trarre inferenze estensionali corrette. Consideriamo la seguente versione del

gioco della zara, presentata da Girotto e Gonzalez (in stampa b) a bambini di vari gruppi di età:

Qui abbiamo due dadi, uno rosso e uno bianco [lo sperimentatore presenta due pupazzi]. Ogni dado ha sei facce. Ogni faccia presenta un numero diverso, compreso tra 1 e 6. Ora giochiamo con questi due personaggi, Paolo e Maria [lo sperimentatore presenta due pupazzi]. Lancio i due dadi in aria e quando cadono sul tavolo li copro per non fare vedere loro quanti punti ho fatto [lo sperimentatore lancia i due dadi e li copre]. Paolo dice che ho fatto 7 punti. Maria dice che ho fatto 9 punti. Secondo te, chi ha più possibilità di vincere la scommessa: Paolo che dice che ho fatto 7 punti o Maria che dice che ne ho fatti 9?

Per risolvere correttamente il problema è necessario costruire una combinatoria elementare di possibilità, considerando ed enumerando i vari modi in cui una data somma può essere prodotta, e concludere che la somma prodotta in più modi (7) ha una maggiore probabilità di verificarsi di quella prodotta in meno modi (9). Ebbene, come predetto dall'ipotesi estensionale, Girotto e Gonzalez (in stampa, b) hanno dimostrato che la maggioranza dei bambini, già a partire dagli 8 anni di età, è in grado di indicare correttamente la somma favorevole. In altre parole, è stato dimostrato che anche bambini relativamente piccoli risolvono problemi che richiedono la stima della probabilità di eventi singoli in modo estensionale, basandosi su un'analisi combinatoria di possibilità.

4. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo brevemente presentato alcuni dei principali risultati ottenuti dalla ricerca cognitiva sul ragionamento probabilistico. Se è stato dimostrato che le persone non esperte producono spesso delle stime probabilistiche scorrette a causa di una non accurata applicazione di procedure euristiche, è stato però anche dimostrata l'infondatezza della visione pessimistica secondo la quale la mente umana, per ragioni evolutive, non è in grado di trattare l'informazione probabilistica. Dati sperimentali ottenuti con partecipanti adulti e bambini e prove storiche convergono nel provare che anche persone totalmente prive di conoscenze tecniche possono stimare correttamente la probabilità di un evento, considerando i modi in cui questo si può verificare. La competenza estensionale intuitiva non è priva di limiti. In alcuni casi, infatti, le persone non esperte producono inferenze estensionali sistematicamente erronee (v. Johnson-Laird, Legrenzi, Girotto & Legrenzi, 2000). Tuttavia, presi nel loro insieme, i risultati che abbiamo considerato ci permettono di concludere che esiste una capacità di ragionamento probabilistico precoce basata su intuizioni estensionali fondamentalmente corrette.

Bibliografia

- Casscells, W., Schoenberger, A., & Grayboys, T. (1978). Interpretation by physicians of clinical laboratory results. *New England Journal of Medicine*, 299, 999-1000.
- Cosmides, L., & Tooby, J. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, 58, 1-73.
- da Buti, F. (1852-1862). *Commento di Francesco da Buti sopra La Divina Commedia di Dante Allighieri*, Pisa, Fratelli Nistri. (Scritto circa 1385).
- della Lana, J. (1866-1867). *Comedia di Dante degli Allagherii col commento di Jacopo della Lana bolognese*, Bologna, Tipografia Regia. (Scritto circa 1324).
- Franklin, J. (2001). *The science of conjecture. Evidence and probability before Pascal*. Baltimore, John Hopkins University Press.
- Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: Frequency format. *Psychological Review*, 102, 684-704.
- Gilovich, T., Griffin, D., & Kahneman, D. (2002). *Heuristic and biases : The psychology of intuitive judgment*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Giroto, V., & Gonzalez, M. (2001). Solving probabilistic and statistical problems: a matter of information structure and question form. *Cognition*, 78, 247-276.
- Giroto, V., & Gonzalez, M. (2002). Chances and frequencies in probabilistic reasoning: rejoinder to Hoffrage, Gigerenzer, Krauss, and Martignon. *Cognition*, 84, 353-359.
- Giroto, V., & Gonzalez, M. (in stampa a). Extensional reasoning about chances. In W. Schaeken, G. De Vooght, A. Vandierendonck, et G. d'Ydewalle. (Eds.), *Mental model theory: Extensions and Refinements*. Mahwah, NJ., Erlbaum
- Giroto, V., & Gonzalez, M. (in stampa b). Probabilistic reasoning and combinatorial analysis. In V. Giroto, & P. N. Johnson-Laird (Eds.). *The shape of reason*. Hove, Psychology Press.
- Hacking, I. (1975). *The emergence of probability*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Kahneman, D., & Tversky, A. (Eds.). (2000). *Choices, values, and frames*. Cambridge, Cambridge University Press.
- Johnson-Laird, P.N., Legrenzi, P., Giroto, V. e Sonino, M. (2000). Illusions in reasoning about consistency. *Science*, 288, 531-532.
- Johnson-Laird, P. N., Legrenzi, P., Giroto, V., Sonino-Legrenzi, M., & Caverni, J. P. (1999). Naive probability: A model theory of extensional reasoning. *Psychological Review*, 106, 62-88
- Pinker, S. (1997). *How the mind works*. New York, Norton (trad. it. *Come funziona la mente*, Milano, Mondadori).
- Tversky, A., & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psychological Review*, 90, 293-315.